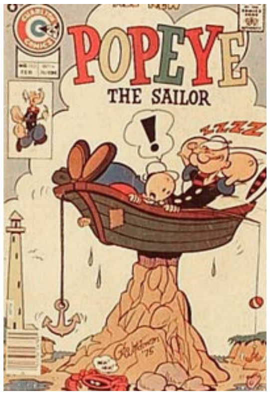
Curso de Estadística I

para Carrera de Pedagogía en
Matemáticas y Computación

Capítulo II

Introducción a la Probabilidad

Osorno, I sem 2009



Introducción

- En la vida cotidiana:
- Probabilidad $\cong$ posible, probable: se considera que hay sucesos en los que se tienen un alto grado de creencia de su ocurrencia. De este modo, la probabilidad es un concepto asociado al azar (incertidumbre, aleatoriedad).

Ejemplos de Fenómenos Inciertos: llamadas telefónicas en conmutadores

- ¿Qué número de llamadas telefónicas se produce en una centralita en un día?

No existe un número fijo que pueda ser conocido a priori, sino un conjunto de posibles valores que podrían darse, cada uno de ellos con un cierto grado de certeza.

Fenómenos inciertos

- Caudal de agua que debe soportar un puente.
- Predicción de sismos, Tsunamis
- Resultados de una operación quirúrgica
- Atravesar una calle en una ciudad
- Comportamiento bursátil
- Viajes en autobús
- La posición de una partícula atómica
- Que no se suba la leche cuando se le está vigilando

¿Existen realmente los fenómenos determinísticos?

Experimentos Determinísticos

- *Fenómenos determinísticos*: son previsibles, dan un resultado que no depende de una distribución de probabilidad. Dan siempre el mismo resultado cuando se repite el experimento (en condiciones idénticas). Los experimentos de este tipo se dicen *determinísticos*.

Un experimento determinístico

Ejemplo 1. En una molécula de agua (H_2O), la proporción de las masas del hidrógeno y oxigeno están en una razón 2:1, como se puede comprobar al disociar las moléculas de un volumen conocido de agua. Del mismo modo, se pueden mezclar estos dos gases con volúmenes en la razón 2:1, y la mezcla de agua resultante tendrá la masa que es exactamente la suma de 2(masa del *H*) + 1(masa de *O*). Así, estamos en presencia de un fenómeno determinista de la química: Sabiendo las masas de cada uno de los elementos es absolutamente predecible la masa del agua a obtener al mezclarlos.

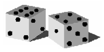
Un experimento distinto al anterior

Ejemplo 2. Al cruzar plantas con flores verdes y amarillas de "guizantes", en tres almácigos de 100 plantas cada uno, se obtienen sucesivamente 72, 79 y 70 plantas con flores amarillas (o sea, en los porcentajes de 72%, 79% y 70%); el porcentaje de flores amarillas no es un valor absolutamente determinado como en el caso del ejemplo 1 de las masas de hidrógeno y oxígeno. No obstante es imposible decir, como el ejemplo precedente, si una de las plantas obtenidas tendrá o no flores verdes o amarillas, y es fácil verificar al repetir la experiencia que el porcentaje de plantas con flores amarillas no difiere mucho de $\frac{3}{4}$.

Ejemplo 2 (cont…)

Ejemplo 2 De lo ya dicho, parece que hay leyes que rigen las repeticiones de los experimentos aleatorios en condiciones idénticas; pero por ahora somos incapaces de formular estas leyes: así, decir que la proporción de plantas con flores amarillas "*no difiere mucho de* $\frac{3}{4}$" no tiene un significado preciso. El objetivo del cálculo de probabilidades es explicitar estas leyes y proporcionar a los sucesos aleatorios de una teoría tanto o más rigurosa como aquella del álgebra o del análisis.

Experimento Aleatorio ($\mathcal{E}$)



- El término "**experimento aleatorio**" se utiliza en la teoría de la probabilidad para referirse a un proceso cuyo resultado no es conocido de antemano con certeza (ya que no se conoce hasta que se observa) .
- Formalmente:
- Un ***experimento aleatorio*** $\mathcal{E}$ es una experiencia que se puede repetir en condiciones aparentemente idénticas y cuyo resultado es un elemento impredecible de un conjunto perfectamente determinado

Ejemplos

- Número de piezas defectuosas en una muestra de 100 piezas.
- Número de llamadas a una centralita telefónica en un día.
- Energía eléctrica consumida en Valdivia durante un periodo de tiempo.

Conjunto (Espacio) Muestral

- Conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

DISCRETOS:

- Lanzamiento de un DADO: El conjunto Muestral Ω = {1,2,3,4,5,6}
- Piezas defectuosas en una muestra de 100 Conjunto muestral: Ω = {0,1,2,…,100}
- Llamadas a una centralita durante un día. Conjunto muestral Ω = {0,1,2,3,…}

- **CONTINUOS**:
  - Energía consumida en Valdivia: Ω = {[0, 8)} (en Mw)

NOTA: A menudo también de usa Ω para designar el Conjunto Muestral

Suceso

Un **suceso** es cualquier subconjunto del conjunto muestral.

- El experimento aleatorio más sencillo es aquel que tiene dos resultados posibles, luego
- E. M.: Ω = {E, F} ({0, 1}; {C, S}; {♂, ♀}, etc.)
  - Al observar un dígito transmitido a través de un canal binario, El espacio muestral es Ω = {0, 1}. La familia (σ-algebra) de todos los resultados tiene: 2^2 = 4 elementos (subconjunto de Ω):

$$2^{\Omega} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

¿ Realmente este tipo de experimento aleatorio es el más sencillo?

`Ej. 2.1 al 2.4`

Sucesos

- Experimento: El lanzamiento de un dado:
- E.M. del experimento: $\Omega =\{$⚀,⚁,⚂,⚃,⚄,⚅$\}$
- Si su respuesta hubiese sido Ω = {1,2,3,4,5,6} entonces Ud. estaría sólo (re)inventando el concepto de una *variable aleatoria* que se discute más adelante.
- Algunos sucesos:

1. El dado cae par: $A = \{$⚁ ⚃ ⚅$\}$
2. Cae un valor menor que cinco: $B = \{$⚀ ⚁ ⚂ ⚃$\}$
3. Salió el número seis: $C = \{$⚅$\}$

Suceso

Cualquier subconjunto del espacio muestral.

- "Observar menos de 5 piezas defectuosas en una muestra de 100":
  B = {0,1,2,3,4,5}
- "Tener más de 50 llamadas de teléfono en una hora" :
  C = {51,52,...,58}
- "Tener una demanda de energía eléctrica entre 10 Mwh y 30 Mwh" :
  D =(10,30)

Sucesos

- Experimento: Encender una ampolleta hasta que se queme.
- Suceso: vida útil de la ampolleta (x).
- E.M. del experimento: $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\}$

  A falta de una mejor representación, se resuelve asignar a los reales no negativos todos los sucesos posibles del experimento.
- Identifique los subconjuntos que representan los siguientes sucesos de Ω:
  1. La ampolleta se quema en un lapso entre 1h. y 1.5 h.
     $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq x < 1.5\}$
  2. La ampolleta dura al menos 5 horas:
     $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 5\}$
  3. Dura exactamente 24 horas: $C = \{24\}$

Suceso ligado a un experimento

- Si $\mathcal{E}$ es un experimento con conjunto de resultados, entonces un *suceso ligado al experimento* $\mathcal{E}$ se define por un subconjunto A de $\mathbf{\Omega}$ el cual ocurre si el resultado del experimento es un elemento de A, es decir:

$$\forall A \subseteq \Omega \wedge \forall \omega \in \Omega,\ A \ \ ocurre \ \ \Leftrightarrow \ \omega \in A$$

Conjunto de sucesos ligados a un experimento $\mathcal{E}$

- Nota: El conjunto de los sucesos ligados a una prueba $\mathcal{E}$ se puede identificar con el conjunto de subconjuntos o partes de $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$$

A menudo este conjunto se anota también como 2^{Ω}

Ejemplos

- Un resultado particular de un experimento es un suceso elemental, es decir:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \{\omega\} \subseteq \Omega \ \ es \ suceso \ elemental$$

A_1 = La cara superior de un dado muestra cuatro puntos
= {4} ← Suceso elemental
A_2 = La cara superior del dado muestra un número par de puntos
={2, 4, 6} ← Suceso compuesto

Hay tres resultados posibles: Las flores obtenidas de una planta son o bien blancas (*b*), rosadas (*r*) o rojas (*R*), luego $\Omega = \{b,r,R\}$

Consideremos
B_1 = Las flores de la planta obtenida son coloreadas (rosadas o rojas)
= $\{r,R\}$ ← Suceso compuesto
B_2 = Las flores de la planta obtenida son rosadas
= { *r* } ← Suceso elemental

Ej. 2.5 a 2.7

$\forall\omega\in\Omega$:

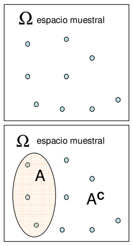
Algunos sucesos especiales

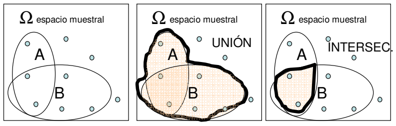
- Como $\Omega\subseteq\Omega$, el conjunto muestral (de resultados) se dice ***suceso seguro** o **cierto**:* se verifica (o ocurre) siempre, cualesquiera sea el resultado del experimento, pues

$$\forall\omega\in\Omega\subseteq\Omega\Rightarrow \quad ocurre \quad \Omega$$

- $\phi\subseteq\Omega$ se dice ***suceso imposible***: cualesquiera sea el resultado del experimento no ocurre jamás: $\forall\ \omega\ \in\ \varnothing \quad \omega\notin\varnothing$

- Cuando se realiza un experimento aleatorio diversos resultados son posibles. El conjunto de todos los resultados posibles se llama conjunto muestral (Ω).
- Se llama suceso a un subconjunto de dichos resultados.
- Se llama suceso contrario (complementario) de un suceso A, A^c al formado por los elementos que no están en A
- Se llama suceso unión de A y B, AUB, al formado por los resultados experimentales que están en A o en B (incluyendo los que están en ambos.
- Se llama suceso intersección de A y B, A∩B o simplemente AB, al formado por los resultados experimentales que están simultáneamente en A y B





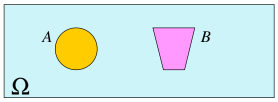
Sucesos

Sucesos incompatibles

- Si A, B sucesos, se dice que "A es ***incompatible*** con B" si A y B no tienen elementos en común:

$$A,B \quad incompatibles \ \Leftrightarrow \ A\cap B=\varnothing$$

Nota: "sucesos incompatibles" es equivalente a "sucesos disjuntos o excluyentes"



`Ej 2.10`

Propiedades

Dados tres sucesos A,B y C de un espacio muestral Ω

$$\text{Conmutativa}:\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\ A\cap B=B\cap A\end{cases}$$

$$\text{Asociativa}:\begin{cases}A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\end{cases}$$

$$\text{Distributiva}:\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$$

$$\text{Leyes de Morgan}:\begin{cases}\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}=\overline{A}\cap\overline{B}\\ \overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}=\overline{A}\cup\overline{B}\end{cases}$$

Sistema completo de sucesos

Definición. Un conjunto de sucesos $C_1,C_2,\cdots,C_n$ asociados a un experimento se dice que forman un ***sistema completo de sucesos*** si y sólo si:

- Son dos a dos incompatibles $\forall i\neq i' \Rightarrow C_i\cap C_{i'}=\varnothing$
- Su unión es el conjunto Ω de todos los resultados del experimento:

$$\sum_{i=1}^{n}C_i=C_1+C_2+\ \cdots\ +C_n=\Omega$$

Estas condiciones significan que cualquier resultado de un experimento ocurre uno y sólo uno de los sucesos $C_1,C_2,\cdots,C_n$.

Ejemplos de sistemas completos de sucesos

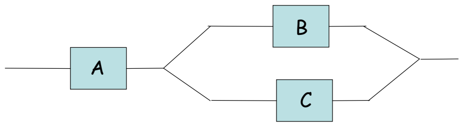
- – *∀ Ω, Ω conjunto muestral: {Ω, ∅} sistema completo* trivial.
- – *∀ Ω, Ω conjunto muestral, ∀A ⊆ Ω: {A, **A**^{c} } sistema completo.*
- – ∀ Ω, Ω conjunto muestral, ∀***A*** ,***B***⊂ Ω: {$A\cap B$, $A\cap B^c$, $A^c\cap B$, $A^c\cap B^c$} es un sistema completo de sucesos.

Equivalencia de Teoría de Conjuntos y Álgebra de Sucesos

Teoría de Conjuntos		Álgebra de Sucesos
Intersección	sii	y
Unión	sii	o
Complemento	sii	no
Subconjunto	sii	Implicación
Partición	sii	Sistema Completo
Disjunto	sii	Incompatible
Vacío	sii	Imposible
Universo	sii	Espacio Muestral

Ejemplos y ejercicios

Se considera el siguiente sistema



Llamamos *F* al suceso *F* = *La componente funciona.*
Analice cada una de las componentes.

- El espacio muestral es:

$\Omega = \{(F,F,F),(F,F,\overline{F}),(F,\overline{F},F),(F,\overline{F},\overline{F}),(\overline{F},F,F),(\overline{F},F,\overline{F}),(\overline{F},\overline{F},F),(\overline{F},\overline{F},\overline{F})\}.$

- $A =$ *La primera componente funciona*$=\{(F,F,F),(F,F,\overline{F}),(F,\overline{F},F),(F,\overline{F},\overline{F})\}$
- $B =$ *La segunda componente funciona*$=\{(F,F,F),(F,F,\overline{F}),(\overline{F},F,F),(\overline{F},F,\overline{F})\}$
- $C =$ *La tercera componente funciona*$=\{(F,F,F),(F,\overline{F},F),(\overline{F},F,F),(\overline{F},\overline{F},F)\}$

El sistema funciona si funciona A y B o C, por lo tanto,

- $D =$ *El sistema funciona*$=A \cap (B \cup C) = \{(F,F,F),(F,F,\overline{F}),(F,\overline{F},F)\}.$

Hacer problemas 2 y 8 de la sección 2.1

Probabilidad

- Dado un experimento E y un espacio muestral Ω, el objetivo de la probabilidad es asignar a cada suceso *A* un número *P*(*A*), que recibe el nombre de probabilidad del suceso *A*, que dará una medida precisa de la probabilidad de que el suceso *A* ocurra.

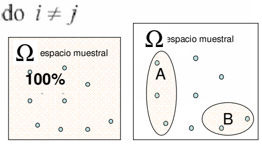
Axiomas de Probabilidad

Dado un espacio muestral Ω, una función de probabilidad asigna valores P(A) a cada suceso $A \subset \Omega$ y satisface :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Para una secuencia de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$

que cumplen $A_i \cap A_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$



Problema fundamental

- Dado un espacio muestral discreto con resultados $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el experimento aleatorio queda caracterizado si asignamos un valor $P(A_i)$ no negativo a cada resultado A_i que verifique

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

- **Ejemplo**. Se lanza dos veces una moneda.

{XX,XC,CX,CC}

Se asigna probabilidad 1/4 a cada uno de los cuatro resultados.

¿ Es una asignación correcta?

Propiedades elementales

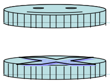
1. $P(\varnothing) = 0.$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$
3. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
4. Para dos sucesos cualesquiera $A, B \subset S$,
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$
5. Para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

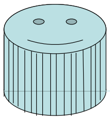
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k>j}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Ejemplo de Monedas

- Se considera el experimento de lanzar una moneda (caso ordinario):

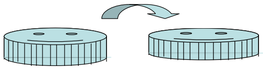


Ejercicio 1

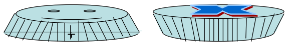


Ejercicio 2

Otros ejercicios

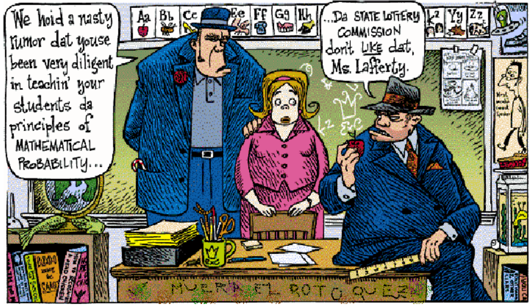


Ejercicio 3



Ejercicio 4

La probabilidad puede ser peligrosa…



Asignación de probabilidades

1. Clásica (Laplace): Equiprobabilidad
2. Frecuencialista (von Mises, 1931)
3. Subjetiva (Bayesiana)

Clásica (Laplace): sucesos equiprobables

- Sea un experimento con un número finito de resultados excluyentes y equiprobables, la probabilidad del suceso A es

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N},}$$

- donde N es el número de resultados posibles del experimento y N(A) el número de ocurrencia de A

Subjetiva (Bayesiana)

- Representa el grado de creencia de una persona de que un determinado suceso ocurra. También se denomina probabilidad personal.
- **Ejemplo**: Pienso que hay un 80% de posibilidades de que llueva hoy, lo cual se escribe P(lluvia) = 0.80.
- NOTA: Esta es la probabilidad del razonamiento inductivo.

Probabilidad Frecuentista (von Mises)

- Si un experimento se repite n veces y n_A resultados son favorables a un suceso A, el límite, cuando n es suficientemente grande $n \to \infty$ se toma como probabilidad de A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

- Esta definición relaciona probabilidad con frecuencia relativa.
- Ejemplo: Lanzamiento de una moneda

Principio Integrador

- No importa como se obtengan las probabilidades, siempre se combinan y manipulan de acuerdo a las mismas reglas (que se rigen cumpliendo los mismos axiomas).

Ejemplos (equiprobabilidad)

- Lanzamiento de una moneda. S={C,X}

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

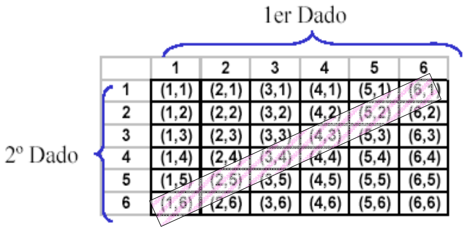
- Lanzamiento de un dado. S={1,2,3,4,5,6}

$$P(\text{"Número par"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- Extracción de una de las 52 cartas de la baraja, S={1 ♥,2 ♥,...., Rey ♠}

$$P(Pique) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Lanzamiento de dos dados



1er Dado

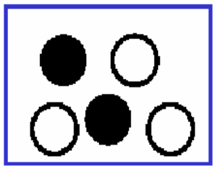
2º Dado

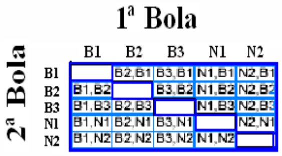
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

$P(\text{"suma 7"}) = 6/36 = 1/6$

Urna: 2 Negras y 3 Blancas

- Se extraen dos bolas al azar, una detrás de otra, sin reposición.





1^a Bola

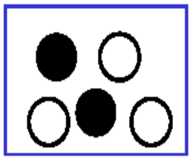
2^a Bola

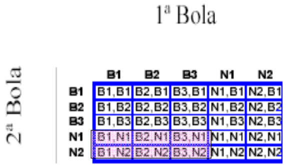
	B1	B2	B3	N1	N2
B1		B2,B1	B3,B1	N1,B1	N2,B1
B2	B1,B2		B3,B2	N1,B2	N2,B2
B3	B1,B3	B2,B3		N1,B3	N2,B3
N1	B1,N1	B2,N1	B3,N1		N2,N1
N2	B1,N2	B2,N2	B3,N2	N1,N2	

- P("1^a Blanca y 2^a Negra") = 6/20 = 3/10

Urna: 2 Negras y 3 Blancas

- Se extraen dos bolas al azar, una detrás de otra, **con reposición**.





1ª Bola

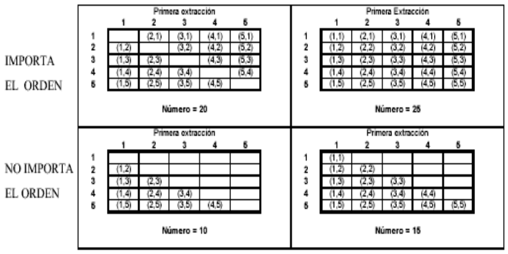
2ª Bola

	B1	B2	B3	N1	N2
B1	B1,B1	B2,B1	B3,B1	N1,B1	N2,B1
B2	B1,B2	B2,B2	B3,B2	N1,B2	N2,B2
B3	B1,B3	B2,B3	B3,B3	N1,B3	N2,B3
N1	B1,N1	B2,N1	B3,N1	N1,N1	N2,N1
N2	B1,N2	B2,N2	B3,N2	N1,N2	N2,N2

- P(“1ª Blanca y 2ª Negra”) = 6/25

Combinatoria: 5 objetos tomados de dos en dos

Sin reemplazo **Con reemplazo**



IMPORTA EL ORDEN — Sin reemplazo

Primera extracción

	1	2	3	4	5
1		(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
2	(1,2)		(3,2)	(4,2)	(5,2)
3	(1,3)	(2,3)		(4,3)	(5,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)		(5,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	

Número = 20

IMPORTA EL ORDEN — Con reemplazo

Primera Extracción

	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)

Número = 25

NO IMPORTA EL ORDEN — Sin reemplazo

Primera extracción

	1	2	3	4	5
1					
2	(1,2)				
3	(1,3)	(2,3)			
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)		
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	

Número = 10

NO IMPORTA EL ORDEN — Con reemplazo

Primera extracción

	1	2	3	4	5
1	(1,1)				
2	(1,2)	(2,2)			
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)		
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)

Número = 15

Combinatoria: Número posible de reordenaciones de *n* objetos tomados de *r* en *r*

	Sin reemplazo	Con reemplazo
IMPORTA ELORDEN	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
NO IMPORTA EL ORDEN	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

El Loto

- Se eligen 6 números distintos del 1 al 38, ambos inclusive:
- Probabilidad de acertar los 6.
- Probabilidad de acertar 5.
- Probabilidad de acertar 4.
- Probabilidad de no acertar ninguno.
- Probabilidad de que salga un número concreto, por ejemplo el número 1.
- 1 - 6 - 21 - 29 - 33 -38

El Loto

$$P(Acertar \quad 6)=\frac{1}{\binom{38}{6}}=\frac{1}{2760681}=0.00000032$$

$$P(Acertar \;\; 5)=\frac{\binom{6}{5}\binom{38}{1}}{\binom{38}{6}}=\frac{228}{2760681}=0.000083$$

$$P(Acertar \quad 4)=\frac{\binom{6}{4}\binom{38}{2}}{\binom{38}{6}}=\frac{228}{2760681}=0.00382$$

$$P(N\,inguno \;)=\frac{\binom{32}{6}}{\binom{38}{6}}=\frac{906192}{2760681}=0.328$$

$$P(Acertar \quad sólo \;\; 1)=\frac{\binom{37}{5}}{\binom{38}{6}}=\frac{6}{38}=0.1579 \;.$$

- En una estación de metro hay 5 pasajeros esperando a un tren con 10 vagones, si cada pasajero elige un vagón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todos elijan un vagón diferente?

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{10^5}=0.3024$$

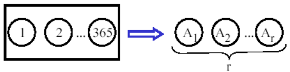
- De un lote con 100 piezas se toman al azar 10, si todas las piezas elegidas son buenas se acepta el lote y se rechaza en caso contrario. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote con 10 piezas defectuosas?

$$N=\binom{100}{10}=\frac{100!}{10!\,90!};\quad N(A)=\binom{90}{10}=\frac{90!}{80!\,10!}$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{90!}{80!}\frac{90!}{100!}=\frac{90\times 89\times\cdots\times 81}{100\times 99\times\cdots\times 91}=0.330$$

Cumpleaños

- Probabilidad de que en un grupo de *r = 25* personas haya al menos dos con el mismo cumpleaños.



- *A* = "No haya coincidencia alguna"

$$P(A) = \frac{365 \times (365-1) \times \cdots \times (365-r+1)}{365^r}$$

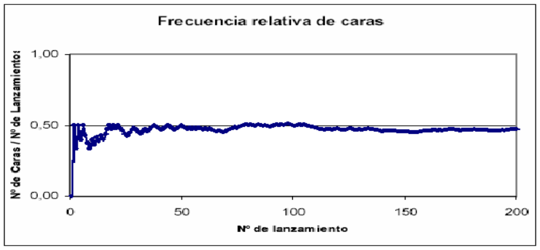
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \qquad r = 25 \rightarrow P(\overline{A}) = 0.578$$

Probabilidad y Frecuencia Relativa

- La probabilidad *P(A)* de un suceso *A* es el límite

$$\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}}$$

- dónde n_A es el número de veces que ha ocurrido *A* al repetir el experimento *n* veces en idénticas condiciones.

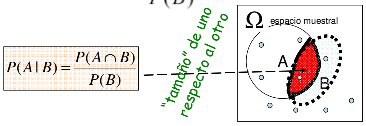


Aquí, $\frac{n(A)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} P(A)$

Probabilidad Condicionada

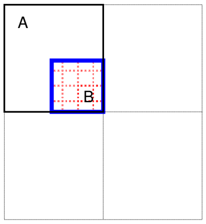
- **Definición.** Sea *B* un suceso con probabilidad distinta de cero, se define probabilidad del suceso *A* dado (que ha ocurrido) *B* a:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

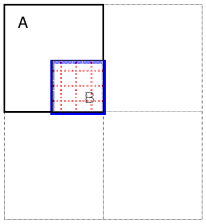


$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Intuir la probabilidad condicionada



P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A ∩ B) = 0,10



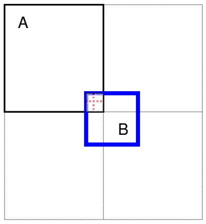
P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A ∩ B) = 0,08

¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

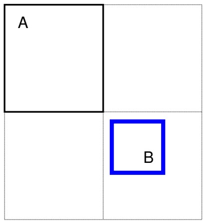
P(A|B)=1

P(A|B)=0,8

Intuir la probabilidad condicionada



P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A ∩ B) = 0,005



P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A ∩ B) = 0

¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

P(A|B)=0,05

P(A|B)=0

Probabilidad condicional

	Mujeres (M)	Hombres (H)	TOTAL
Fumadores (F)	0,12	0,18	**0,30**
No Fumadores (N)	0,39	0,31	**0,70**
TOTAL	**0,51**	**0,49**	**1,00**

$$P(F)=0{,}30\quad\begin{cases} P(F\mid H)=\dfrac{0{,}18}{\mathbf{0{,}49}}=\mathbf{0{,}37} \\ P(F\mid M)=\dfrac{0{,}12}{\mathbf{0{,}51}}=\mathbf{0{,}24}\end{cases}$$

Utilidad

- Actualizar probabilidad del suceso A *en* función de la información disponible I

$$P(A|I) = P(A\cap I)/P(I)$$

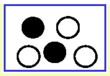
- Cálculo de la intersección de sucesos

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$$ **REGLA MULTIPLICATIVA**

- Cálculo de probabilidad de un suceso

$$P(A)=P((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}))$$
$$=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})$$

Ejemplo Urna



- Probabilidad de "1ª Blanca y 2ª Negra"
- **Sin reemplazo**:

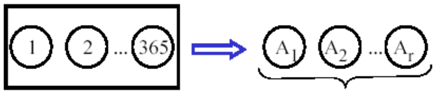
$$P(B1\cap N2) = P(B1)\ P(N2|\ B1)$$
$$= (3/5)(2/4) = 3/10$$

- **Con reemplazo**:

$$P(B1\cap N2) = P(B1)\ P(N2|\ B1)$$
$$= (3/5)(2/5) = 6/25$$

Cumpleaños

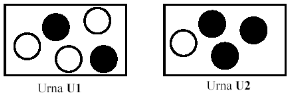
Probabilidad de que en un grupo de *r = 25* personas haya al menos dos con el mismo cumpleaños.



B_r =" No haya ninguna coincidencia en r "

$$P(B_r) = P(B_1)P(B_2\mid A_1)P(B_3\mid A_1\neq A_2)\cdots P(B_r\mid A_1\neq A_2\neq\cdots\neq A_{r-1})$$
$$=1\times\frac{365-1}{365}\times\frac{365-2}{365}\times\cdots\times\frac{365-r+1}{365}$$
$$P(\overline{B_r}) = 1 - P(B_r)\,,\qquad r=25\rightarrow P(\overline{B_r}) = 0.578$$

Ejemplo (cont.)



Se toma al azar una bola de U1 y se mete en

Se extrae una bola de U2: ¿ *P*(Blanca) ?

$$P(B)=P(B\mid B1)P(B1)+P(B\mid N1)P(N1)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}=0.32$$

Independencia

Si el conocimiento de la ocurrencia de un suceso *B* cambia la probabilidad de que ocurra otro *A*, se dice que *A* y *B* son **dependientes**, en ese caso *P(A|B)≠P(A).*

Cuando el suceso *A* es independiente de *B*, la ocurrencia de *B* no cambia la probabilidad de *A*, es decir *P(A|B) = P(A).*

Como *P(A|B) = P(A ∩ B)/P(B),*

A y ***B* son independientes** ⇔ P(A ∩ B) = P(A) P(B)

Lanzamiento de dos monedas

$S = \{CC, CS, SC, SS\}$

Hipótesis:

- Monedas equilibradas: P(C) = P(S)
- Independientes

$P(CC) = P(C)P(C) = (1/2)x(1/2) = 1/4$

$P(CS) = P(C)P(S) = (1/2)x(1/2) = 1/4$

$P(SC) = P(S)P(C) = (1/2)x(1/2) = 1/4$

$P(SS) = P(S)P(S) = (1/2)x(1/2) = 1/4$

Independencia (3 o más sucesos)

- Tres sucesos *A, B* y *C* son independientes si

$$\begin{cases} \bullet P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C) \\ \bullet P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \\ \bullet P(A \cap C) = P(A)\, P(C) \\ \bullet P(B \cap C) = P(B)\, P(C) \end{cases}$$

- Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si cualquier subconjunto $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$, cumple

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

- Cualquier problema de probabilidad puede resolverse en teoría mediante aplicación de los axiomas. Sin embargo, es más cómodo conocer algunas reglas de cálculo:
  - $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B)$
    - Prob. de que pasen A y B es la prob. de A y que también pase B sabiendo que pasó A.
- Dos sucesos son independientes si la el que ocurra uno no añade información sobre el otro. En lenguaje probabilístico:
  - A indep. B ⇔ $P(A|B) = P(A)$
- Dicho de otra forma:
  - A indep. B ⇔ $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

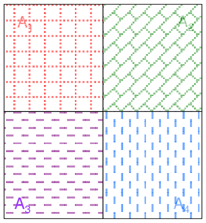
EJEMPLO: En una muestra de 1000 individuos elegidos al azar, entre una población de enfermos de osteoporosis 760 eran mujeres.

- ¿Qué porcentaje de mujeres hay en la muestra?
  - 760/1000=0,76=76%
- Si elegimos a un individuo de la población, qué probabilidad hay de que sea mujer:
  - La noc. frec. de prob. nos permite aproximarlo a P(Mujer)=0'76
- ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un individuo de la población sea hombre:
  - P(Hombre)=P(Mujer')=1-0,76=0,24

Se sabe de otros estudios que entre los individuos con osteoporosis, aprox. la cuarta parte de las mujeres fuman y la tercera parte de los hombres. Elegimos a un individuo al azar de la población de enfermos.

- ¿Qué probabilidad hay de que sea mujer fumadora?
  - P(Mujer ∩ Fumar) = P(Mujer) P(Fumar|Mujer) = 0,76 x ¼ = 0,19
- ¿Qué probabilidad hay de que sea un hombre fumador?
  - P(Hombre ∩ Fumar) = P(Hombre) P(Fumar|Hombre) = 0,24 x 1/3 = 0,08

Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos

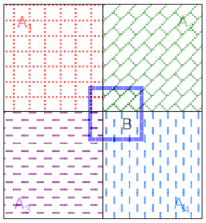


Son una colección de sucesos

$A_1, A_2, A_3, A_4\ldots$

Tales que la unión de todos ellos forman el espacio muestral, y sus intersecciones son disjuntas.

Divide y vencerás

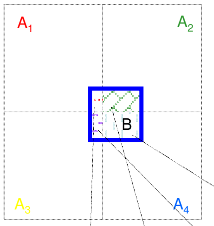


Todo suceso B, puede ser descompuesto en componentes de dicho sistema.

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$

Nos permite descomponer el problema B en subproblemas más simples. Créame . Funciona.

Teorema de la probabilidad total



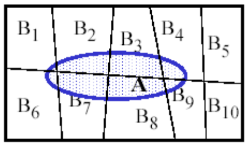
Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

… podemos calcular la probabilidad de B.

P(B) = P(B∩A_1) + P(B∩A_2) + P(B∩A_3) + (B∩A_4)

=P(B|A_1) P(A_1) + P(B|A_2) P(A_2) + …

Ley de probabilidad total



Partición.

$$B_1,B_2,\dots,B_n:\quad B_j \subset S$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap S) \\ &= P[A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)] \\ &= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)] \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots P(A \mid B_n)P(B_n)}$$

Teorema de Bayes

Rev. Thomas Bayes, (1702-1761)

Sea $B_1,B_2,\dots,B_n$ una partición del espacio S tal que $P(B_j) > 0$, para $j = 1,2,\dots,n$ y sea A cualquier suceso con $P(A) > 0$, entonces para cualquier B_i :

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}.}$$

Ejemplo: En este aula el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los varones, son fumadores el 20%.

- ¿Qué porcentaje de fumadores hay en total?
  - P(F) = P(F∩H) + P(F∩M)

    = P(F|H) P(H) + P(F|M) P(M)

    =0,2 x 0,3 + 0,1 x 0,7

    = 0,13 =13%

T. Prob. Total.
Hombres y mujeres forman un Sistema Completo de Sucesos

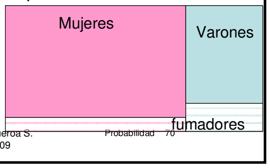
- ¿Se elije a un individuo al azar y resulta fumador. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?
  - P(H|F) = P(F ∩ H)/P(F)

    = P(F|H) P(H) / P(F)

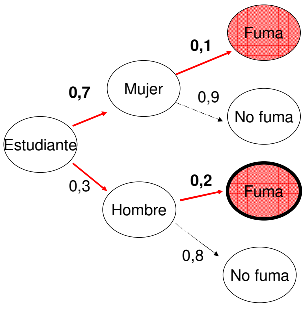
    = 0x2 x 0,3 / 0,13

    = 0,46 = 46%

T. Bayes



Expresión del problema en forma de árbol

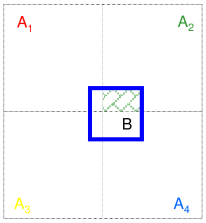


P(F) = 0,7 x 0,1 + 0,3x0,2

P(H | F) = 0,3x0,2/P(F)

- Los caminos a través de nodos representan intersecciones.
- Las bifurcaciones representan uniones disjuntas.
- Se pueden resolver problemas la técnica de que se prefiera.

Teorema de Bayes



Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

…si ocurre B, podemos calcular la probabilidad (*a posteriori*) de ocurrencia de cada A_i.

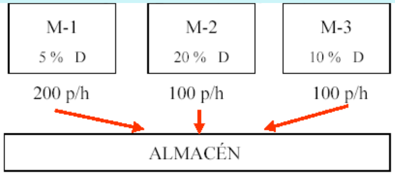
$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \cap A_i\ )}{P(B)}$$

donde P(B) se puede calcular usando el teorema de la probabilidad total:

P(B)=P(B∩A_1) + P(B∩A_2) + P(B∩A_3) + (B∩A_4)

=P(B|A_1) P(A_1) + P(B|A_2) P(A_2) + …

Ejemplo de Bayes



El porcentaje de piezas defectuosas fabricadas por tres máquinas es 5%, 20% y 10%. La primera fabrica 200 piezas por hora y las otras dos 100 piezas por hora. Todas las piezas fabricadas se llevan a un almacén. Al final del día se toma una pieza del almacén y es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de M-1?

$$P(M_1 | D) = \frac{P(D | M_1)P(M_1)}{P(D | M_1)P(M_1) + P(D | M_2)P(M_2) + P(D | M_3)P(M_3)}$$
$$= \frac{0.05 \times 0.5}{0.05 \times 0.5 + 0.20 \times 0.25 + 0.10 \times 0.25} = 0.25$$

$$P(M_2 | D) = \frac{P(D | M_2)P(M_2)}{P(D | M_1)P(M_1) + P(D | M_2)P(M_2) + P(D | M_3)P(M_3)}$$
$$= \frac{0.20 \times 0.25}{0.05 \times 0.5 + 0.20 \times 0.25 + 0.10 \times 0.25} = 0.50$$

$$P(M_3 | D) = \frac{P(D | M_3)P(M_3)}{P(D | M_1)P(M_1) + P(D | M_2)P(M_2) + P(D | M_3)P(M_3)}$$
$$= \frac{0.10 \times 0.25}{0.05 \times 0.5 + 0.20 \times 0.25 + 0.10 \times 0.25} = 0.25$$

$$P(M_1 | D) + P(M_2 | D) + P(M_3 | D) = 1$$

Ejemplo de Bayes

Si una persona es portadora del virus A, un análisis de sangre lo detecta el 99% de las veces. Sin embargo, el test también proporciona *"falsos positivos"*, indicando la presencia del virus en el 3% de personas sanas. Si sólo 5 de cada 1000 personas tienen el virus, ¿cuál es la probabilidad de que una persona tenga el virus realmente si el análisis ha dado positivo?

V ="Tener el Virus" S ="El análisis es positivo"

$$P(V | S) = \frac{P(V \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S | V)P(V)}{P(S | V)P(V) + P(S | \overline{V})P(\overline{V})}$$
$$= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.03 \times 0.995} = 0.142$$

Ejemplo Virus

(Aplicado a 1.000.000 personas)

	SANOS	ENFERMOS	Total
NEGATIVO	965.150	50	965.200
POSITIVO	29.850	4.950	34.800
Total	995.000	5.000	1.000.000

Entre los **34.800** que han dado positivo, sólo **4.950** tienen el virus

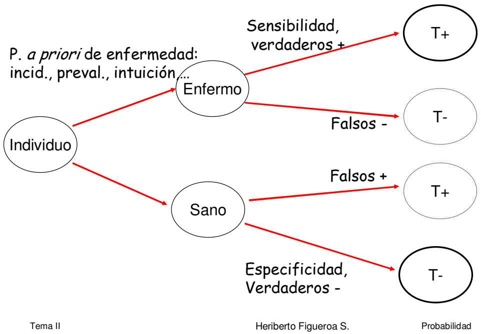
P(V|S) = 4.950/34.800 = 0.142

Pruebas diagnósticas

Una prueba diagnóstica sirve para ayudar a mejorar una estimación de la probabilidad de que un individuo presente una enfermedad.

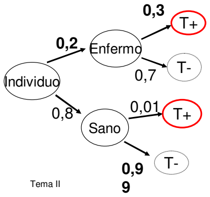
- En principio tenemos una idea subjetiva de P(Enfermo). Nos ayudamos de…
  - Incidencia,
    - Porcentaje de nuevos casos de la enfermedad en la población.
  - Prevalencia,…
    - Porcentaje de la población que presenta una enfermedad.
- Por otra parte, para confirmar, usamos una prueba diagnóstica. La misma ha sido evaluada con anterioridad sobre dos grupos de individuos: sanos y enfermos. Así de modo frecuentista se ha estimado:
  - Sensibilidad (verdaderos +) = Tasa de acierto sobre enfermos.
  - Especificidad (verdaderos -)= Tasa de acierto sobre sanos.
- A partir de lo anterior y usando el teorema de Bayes, podemos calcular las probabilidades *a posteriori* (en función de los resultados del test): Índices predictivos
  - P(Enfermo | Test +) = Índice predictivo positivo
  - P(Sano | Test -) = Índice predictivo negativo

Pruebas diagnósticas: aplicación T. Bayes.



Ejemplo: Pruebas diagnóstica y T. Bayes

- La diabetes afecta al 20% de los individuos que acuden a una consulta. La presencia de glucosuria se usa como indicador de diabetes. Su sensibilidad es de 0,3 y la especificidad de 0,99. Calcular los índices predictivos.



$$P(Enf \mid T+) = \frac{P(Enf \bigcap T+)}{P(Enf \bigcap T+) + P(Sano \bigcap T+)}$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}01} = 0{,}88$$

$$P(Sano \mid T-) = \frac{P(Sano \bigcap T-)}{P(Sano \bigcap T-) + P(Enf \bigcap T-)}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}99}{0{,}8 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = 0{,}85$$

Observaciones

- En el ejemplo anterior, al llegar un individuo a la consulta tenemos una idea *a priori* sobre la probabilidad de que tenga una enfermedad.
- A continuación se le pasa una prueba diagnóstica que nos aportará nueva información: Presenta glucosuria o no.
- En función del resultado tenemos una nueva idea (*a posteriori*) sobre la probabilidad de que esté enfermo.
  - Nuestra opinión a priori ha sido modificada por el resultado de un experimento.
  - Relaciónalo con el método científico.

-¿Qué probabilidad tengo de estar enfermo?

- En principio un 20%. Le haremos unas pruebas.

- Presenta glucosuria. La probabilidad ahora es del 88%.

Tareas

Encuentre seis diferencias entre estos dos paneles

Integrar grupos de 3 a 5 alumnos para hacer la tarea y la siguiente serie de ejercicios del capítulo II: 21, 26, 29, 32, 36, 39,45, 46, 48, 51, 52, 55, 56, 58, 60, 69, 72, 75, 78, 85, 90, 103, 104, 105, de fotocopias del libro Devoré. La fecha de entrega es el jueves 30 de abril.

Viene...

Variables aleatorias discretas