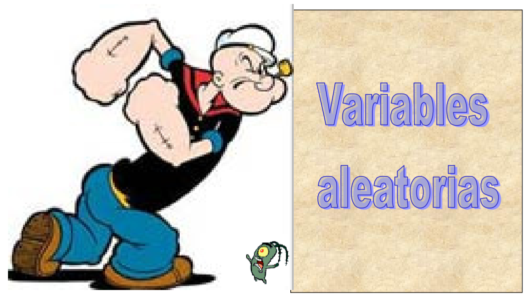


Prof. Heriberto Figueroa S.
Otoño 2009

Agenda

- En este capítulo se abordan, trabajan y se solucionan problemas prácticos atingentes a los siguientes temas:

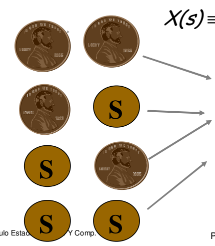
1. Variable Aleatoria Discreta (vad)
2. Distribuciones y Cuantías de vad
3. Valores Esperados y Varianzas de vad
4. Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica, Binomial Negativa, y Poisson.

Variables aleatorias

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada uno de los puntos de un espacio muestral S.

- **Lanzamiento de 2 monedas**

X(s)≡ Número de CARAS



X(s)
CC → 2
CX → 1
XC → 1
XX → 0

Definición Formal de V.A.

Definición. *Una **variable aleatoria** X asociada a un experimento* ($\mathcal{E}$) *es una función del conjunto* Ω *de los resultados de* ($\mathcal{E}$) *en un conjunto* $D = X(\Omega)$ *de valores de* ***X***.

En la práctica $X(\Omega)$ será el conjunto de los reales $\mathbf{R}$ o el conjunto $\mathbf{R}^p$ de los sistemas de p números reales; así hablaremos de variables reales o vectoriales.

Un ejemplo conceptual de vad

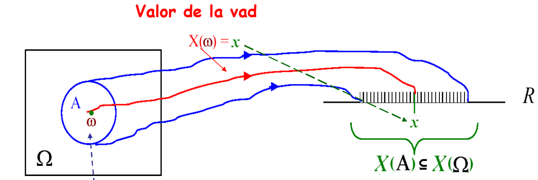


Imagen del suceso *A*
Note que **X**(*A*) ocurre:
$X(\omega) \in X(A)$

Ejemplo de Variables Aleatorias

1. Se lanza un dado azul y uno rojo y se considera la suma X de los resultados.

   El conjunto Ω de los resultados del experimento es el conjunto de los pares (x,y) de enteros comprendidos entre *1* y 6 (x, y son respectivamente los números de pintas marcadas en el dado azul y el rojo); la suma X de los resultados obtenidos es la función de en definida por :

$$X(x,y) = x + y$$

X es una variable aleatoria discreta.

Variable aleatoria en $\mathbf{R}^2$

1. La prueba consiste en tomar al azar una piña de las recolectadas en el campo y pesar su peso bruto y el peso del jugo que se le extrae.
   El conjunto Ω es el conjunto de piñas del campo. Así si ω es un elemento de Ω (una piña particular) se definen dos variables aleatorias reales al poner
   $X(\omega)$ = peso de la piña ω
   $Y(\omega)$ = peso del jugo extraído de la piña ω

Se puede considerar la variable vectorial $\boldsymbol{U}$ definida por

$\boldsymbol{U}(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ (en R^2)

Variable Aleatoria Discreta

- Cuando los valores que toma una variable aleatoria son *finitos o infinitos numerables* se dice que es **discreta**.
  - Valores en números de puntos de resultado obtenidos al lanzar un dado {1,2,3,4,5,6}
  - Número de veces que hay que lanzar una moneda hasta obtener una CARA:
    {1,2,3,4, ...}

Variable Aleatoria Continua

- Cuando los valores que toma una variable aleatoria son *algún intervalo de los reales* se dice que es **continua**. Se anota **vac**.
  - Valores en el intervalo de variación de los pesos de las piñas.
  - Tiempos de desintegración de partículas radio activas

Ejemplo de vad

- Sean X *vad*, y sea un valor posible de X. El conjunto de todos los puntos $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) = x \in X(\Omega)$ es el suceso que se denota $X^{-1}(x) = \omega$. Por ejemplo, consideremos "X = 2" del ejemplo 1.1 consta de tres puntos maestrales,
- "X = 2" = {CCS, CSC, SCC}

Formalmente $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$ = "$X = x$"

En efecto, en este caso: $\Omega = \{C, S\}^3$

$\{\omega \in \{C, S\}^3 \mid X(\omega) = 2\} = X^{-1}(\{2\})$ = "$X = 2$"

Ejemplo de v.a.

- Se lanza una moneda 3 veces.
  - Espacio muestral:
    $\Omega = \{C,S\}^3$
    = {CCC, CCS,CSC,SCC,SSC,SCS,CSS,SSS}

  X = Número de caras. Así, $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
  - La distribución de probabilidad de X es el conjunto de probabilidades asociadas con sus posibles valores. La probabilidad de que X asuma un valor particular *x* se obtiene sumando las probabilidades de todos los puntos de para los cuales se asignó *x*. Así se encuentra:
  - P(X = 0) = 1/8, P(X = 1) = 3

  O de un modo equivalente $P(X = x) = \dfrac{\binom{3}{x}}{8}; \quad \forall x \in X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

Monedas (o bytes) en el general

- El lanzamiento de una moneda (posiblemente sesgada):
- X = k = {k caras en 3 lanzamientos}.
- Ω = {CCC, … , SSS}; $X(\Omega)$ = {0, 1 ,2, 3}
- $P_0 = P(X = 0) = (1-p)^3$ ya que $P(\{SSS\}) = (1-p)^3$ por independencia
- $P_1 = P(X = 1) = 3(1-p)^2 p$
- $P_2 = P(X = 2) = 3(1-p)\, p^2$
- $P_3 = P(X = 3) = p^3$

Notación de V.A.,

- Por convención se usan *letras mayúsculas* cercanas al final del alfabeto para las variables aleatorias (por ejemplo, X, Y, Z,…) y las *letras minúsculas* correspondientes para representar los valores tomados por la variable aleatoria (p.e. x).
- Para el E.M. Ω, X: $\Omega \to \mathbb{R}$, y para un número real x

El suceso "X = x" ocurre $\Leftrightarrow$ el suceso "X(ω) = x" *ocurre*
$\Leftrightarrow$ el suceso $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ ocurre

Nótese que $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\} = X^{-1}(x)$

Cálculo de la probabilidad

- La probabilidad del suceso "X = x" es la suma de las probabilidades de todos los puntos que contiene. Así, por ejemplo
- P(X = 2) = $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Igualdad de Sucesos

- A = B sii para todo $\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$
- Si $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq X(\Omega)$ y P definida en Ω

si $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \in B \subseteq X(\Omega)\}$

entonces

$$\forall \omega \in A \subseteq \Omega \Leftrightarrow X(\omega) = x \in B \subseteq X(\Omega)$$

Es decir, B ocurre sii A ocurre. Luego

P(A) = P(B) y A y B son sucesos equivalentes

Distribución de Probabilidad

- La **distribución de probabilidad** (**cuantía**) de una *va* discreta está definida por

$$\boxed{p(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})}$$

- Como es claro $p(x)$ es distribución de probabilidad de X si y sólo si

1. $p(x) \geq 0, \ \forall x \in X(\Omega)$
2. $\sum_{\forall x \in X(\Omega)} p(x) = 1,$

Ejemplo

- Se lanza una moneda 3 veces. Todos los sucesos son igualmente probables:

P(CCC) = P(CCS) = … P(SSS) = 1/8 .

Sea X: $\Omega \longrightarrow$ **R** tal que X(ω) = # de caras en ω.

Aquí X(Ω) ={0,1,2,3}

Entonces
P(X = 0) = P({SSS}) = 1/8
P(X = 1) = P({CSS,SCS,SSC}) = 3/8
P(X = 2) = P({CCS,CSC,CCS}) = 3/8
P(X = 3) = P({CCC}) = 1/8

Y además

$$\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) = 1.$$

Distribución de probabilidad

Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ los valores que puede tomar la variable aleatoria X. Se denomina **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria a $P(X=x_i)$ que cumple:

- $P(X = x_i) \geq 0$
- $\Sigma_{i=1} P(X = x_i) = 1.$

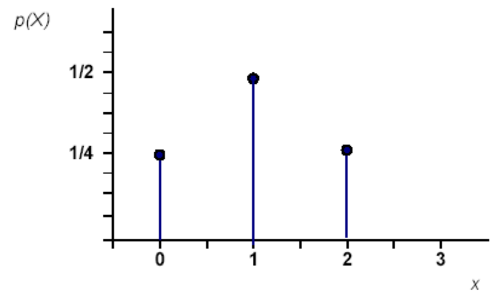
Nº de Caras al lanzar 2 monedas

x		$P(X=x)$
0	$\to$	1/4
1	$\to$	1/2
2	$\to$	1/4

Razonamiento

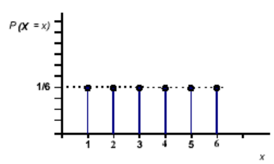
Probability Distribution	
Valores(x)	Probabilidad
0	1/4 = .25
1	2/4 = .50
2	1/4 = .25

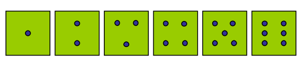
Distribución de probabilidad



Lanzamiento de un dado

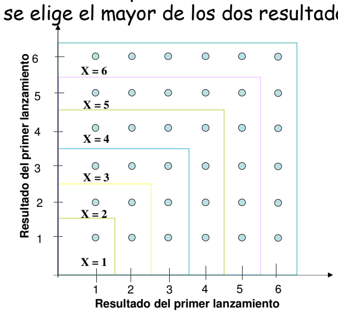
x	$P(X=x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6





Ejemplo

- V.a. X = Número de puntos en dos lanzamientos de un dado y se elige el mayor de los dos resultados



Razonamiento

- El suceso "X = 1" consiste de un solo punto (1,1) y tiene probabilidad f(1) = 1/36.
- El suceso "X = 3" consiste de tres puntos (1,2), (2,2), (2,1)
- y tiene probabilidad f(2) = 3/36.
- Los sucesos correspondientes a los demás sucesos posibles de X se muestran en la figura anterior, y se pueden obtener de una manera similar.

Funciones asociadas

- La función de probabilidad y la f.d.a de X son entonces como sigue:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36
$F(x)$	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1

En este caso, f y F están dadas por fórmulas algebraicas simples:

$$f(x)=\frac{2x-1}{36}, \qquad F(x)=\frac{x^2}{36}; \qquad x = 1, 2, \ldots, 6$$

Razonamiento general

Estos resultados se pueden obtener fácilmente sin necesidad de tener que listar todos los puntos, mediante un método que de puede extender rápidamente al caso de más de dos lanzamiento, al considerar

P(El numero mayor que es a lo más x)

= P(ambos números son a lo más x)

La probabilidad que un suceso de un solo lanzamiento que sea a lo más x, es $x/6$ para x = 0, 1,…,6. Ya que los lanzamientos son independientes, la probabilidad de que ambos sucesos son a lo más $(x/6)^2$, y de aquí que

$$F(x) = \frac{x^2}{36}; \quad x = 1, 2, \ldots, 6$$

Continuación

La función de probabilidad se obtiene como sigue:

$$f(x) = P(X = x) = P(X \le x) - P(X \le x-1) = F(x) - F(x-1)$$

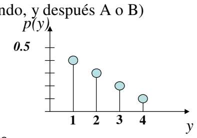
$$= \frac{x^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{36} = \frac{2x-1}{39}; \qquad x = 1, 2, \ldots, 6$$

Más en general, si X el mayor número obtenido en k lanzamientos de un dado, entonces

$$F(x) = \frac{x^k}{6^k}, \quad f(x) = \frac{x^k - (x-1)^k}{6^k}; \quad x = 1, 2, \ldots, 6 \clubsuit$$

Muestras de sangre

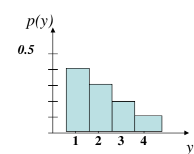
- Ha cinco donantes potenciales de sangre – A, B, C, S y E – de los cuales sólo A y B tienen del tipo O+. Cinco muestras de sangre, una de cada individuo, se clasificarán en orden aleatorio hasta que sea identificado un individuo O+. Considere la variable Y = # clasificaciones necesarias para identificar un individuo O+. Encontrar la distribución de probabilidad de Y.
- Y(Ω) = {1,2,3,4}
- $p(1)$ = P(Y = 1) = P({AXXXX}+{BXXXX}) = 2/5 = 0.4
- $p(2)$ = P(Y = 2) = P(C, D ó E primero y después A ó B) = P(C, D ó E primero)x P(A ó B después| C, D ó E primero) = (3/5)x(2/4) = 0.3
- $p(3)$ = P(Y = 3) = P(C, D ó E primero y segundo, y después A o B) = (3/5)x(2/4)x(2/3) = 0.2
- $p(4)$ = P(Y = 4) = P(C, D, y E todas primero) = (3/5)x(2/4)x(1/3) = 0.1
- $p(y)$ = P(Y = 4) = 0, si $y \neq 1, 2, 3, 4$.



Histogramas de probabilidad

- Otra representación gráfica utilizada con las distribuciones de probabilidad es el denominado **histograma de probabilidad**: Que se hace como siempre.

Ejemplo: En el ejemplo anterior, de cada y con $p(y) > 0$, se construye un rectángulo con centro en y. La altura de cada rectángulo es proporcional a $p(y)$, y la base es la misma para todos los rectángulos. Cuando los valores posibles están igualmente separados, la base se escoge como la distancia entre los valores sucesivos de y (aunque puede ser menor).



Modelo asociado al experimento

Sea $\mathcal{E}$ un experimento y A un suceso ligado a este experimento, el cual puede o no ocurrir. Si $\Omega = \{A, A^C\}$, espacio muestral trivial. Y se define

$$P : \Omega \rightarrow [0,1]$$
$$A \rightarrow P(A) = p$$

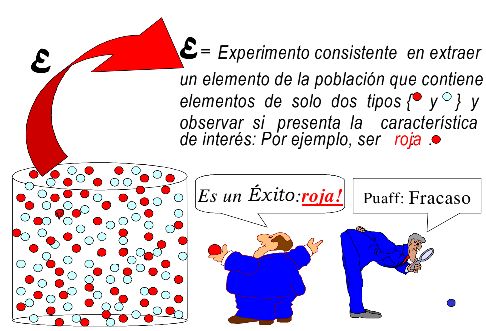
Este experimento $\mathcal{E}$, *se dice **experimento** (ensayo o prueba) **Bernulli**, y la probabilidad P así definida se llama Probabilidad de Bernulli.*

NOTA: P es probabilidad:

Pues $P(\Omega) = P(A + A^C) = P(A) + P(A^C) = 1$,

Además: como $P(A) + P(A^C) = 1 \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - p$

Un experimento aleatorio



Distribución asociada a una v.a.

Ahora, si X variable aleatoria que puede tener sólo dos valores: 0 y 1, asociados respectivamente a los sucesos A^C y su complementario A, es decir:

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega = A \\ 0 & si\ \omega = A^C \end{cases}$$

X se llama *variable* ***Bernulli***. Note que X es una variable indicadora del suceso A. Ahora, se acostumbra llamar ***Éxito*** al valor 1 y ***Fracaso*** al valor 0, refiriéndose a la ocurrencia o no del suceso A.

Finalmente se define

$P(X=1) = p$ (=P(A) = p(1)) y $P(X=0) = 1-p$ (= P(A^C) = p(0))

Parámetros de una Distribución

Si la función distribución $p(x)$ depende de una cantidad θ a la cual se le puede asignar valores y que con cada asignación se defiine o caracteriza completamente *p(x).* Tal cantidad se denomina ***parámetro*** de la distribución.

El conjunto de todas las distribuciones de probabilidad para diferentes valores del parámetro se llama ***familia de distribuciones*** de probabilidad.

Ejemplo: en el caso anterior de la distribución de Bernulli, para determinar un miembro de la familia Bernulli, basta con elegir un valor $\theta = p \in]0,1[$ para estar completamente caracterizada.

En el caso de una moneda se elige $p = 1/2$

Función de Distribución

La función distribución de una variable aleatoria $F_X(x)$ de la variable aleatoria X se define para todo número real x como:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Si X va discreta (vad), entonces:

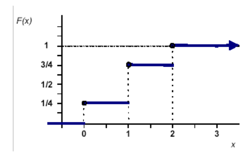
$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} p(t)$$

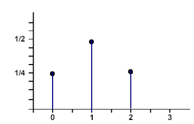
Para cualquier valor de x, F(x) es la probabilidad de que el valor observado de X sea a lo sumo x.

Función distribución puntual de probabilidad (cuantía)

Ejemplo. X = Número de caras al lanzar 2 monedas

x	$F_X(x)$
$(-\infty,0)$	0
$[0,1)$	1/4
$[1,2)$	3/4
$[2,\infty)$	1





Distribución puntual de probabilidad

Distribución uniforme

(Distribución uniforme discreta)

Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución uniforme discreta si todos los valores posibles son igualmente probables. Así tenemos

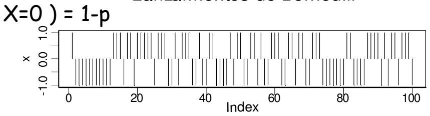
$$f(x) = k, \quad \forall x \in X(\Omega)$$

donde k es una constante. Ya que necesariamente debe cumplir con $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1 \Rightarrow X(\Omega)$ tiene finitos puntos, y $k = \frac{1}{N}$ donde N es el número de puntos en $X(\Omega)$

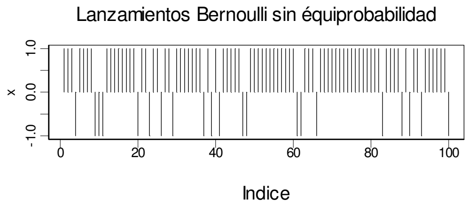
Distribución Bernulli (Equiprobabilidad)

- El lanzamiento de una moneda por cara o sello se convierte en examinar una variable aleatoria según una distribución Bernulli de parámetro 0.5. Si la moneda es insesgada y el « sello » aparece con una probabilidad p, se trata de una distribución Bernoulli de parámetro p.
- P(X=1) = p
- P(X=0) = 1-p

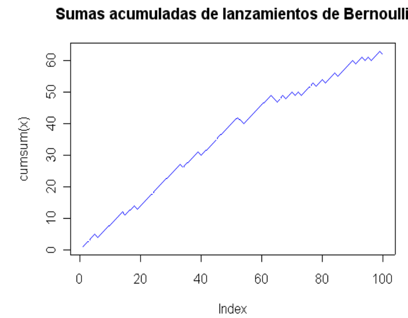
Lanzamientos de Bernoulli



Bernulli *Sin* Equiprobablidad

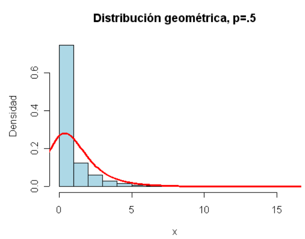


Caso de Sin Equiprobabilidad

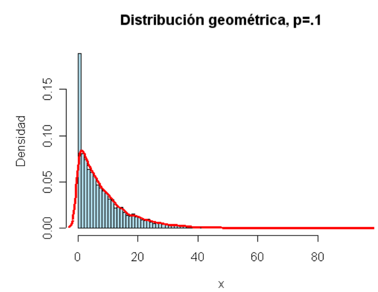


Distribución geométrica

- Esta es la distribución del número de ensayos antes de obtener un resultado de una sucesión de pruebas Bernoulli



p = 0.1



Ejemplo 3.7

- Hay seis lotes listos para distribución. El número de componentes defectuosos en cada uno de los lotes es:

Lote	1	2	3	4	5	6
N° de defectuosos	0	2	0	1	2	0

Se selecciona un lote al azar para repartir. ¿Cuál es la distribución de probabilidad puntual de los defectos de estos lotes?

Sea X = #de defectuosos en el lote seleccionado.

Entonces X({1,2,3,4,5,6}) = {0, 1, 2}

$p(0)$ = P(X = 0) = P(se seleccionó el lote 1, 3 ó 6) =3/6 = 0.50

$p(1)$ = P(X = 1) = P(se seleccionó el lote 4) = 1/6 = 0.167

P(2) = P(X = 2) = P(se selecciona el lote 2 o 5) = 2/6 = 0.333

Función de distribución acumulativa

x	0	1	2	*tov*
$p(x)$	0.500	0.167	0.333	0

La probabilidad de X sea a lo sumo 1 es entonces:

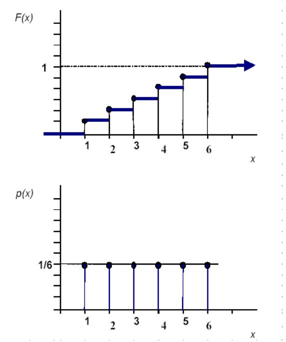
$P(X \le 1) = p(0) + p(1) = 0.500 + 0.167 = 0.667$

$P(X \le x) = 0$ para todo $x < 0$ y $P(X \ge x) = 1$ para todo $x > 1$

$X \le 1.5$ si y sólo si $X \le 1 \Rightarrow P(X \le 1.5) = P(X \le 1) = 0.667$

NOTA: $P(X < x) < P(X \le x) \quad \forall x \in X(\Omega)$

Lanzamiento de un dado



x	$P(X=x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$

Probabilidad de Intervalos para *Vad*

$$\forall a,b\in R, a\le b : P(a\le X\le b)=F(b)-F(a_{-})$$

donde "a_{-}" representa el valor máximo posible de X que sea estrictamente menor que a.

Si $a,b\in \boldsymbol{Z}, a\le b : P(a\le X\le b)=F(b)-F(a-1)$

Funciones compuestas

Como se sabe una variable aleatoria X es una función de valores reales definida en el conjunto muestral Ω:

$$X:\Omega \longrightarrow \boldsymbol{R}$$
$$\omega \longrightarrow x=X(\omega)$$

Supongamos que *h* es otra función real:

$$h: X(\Omega) \longrightarrow \boldsymbol{R}$$
$$x \longrightarrow h(x)$$

Entonces $h(X)$ también es una variable aleatoria definida sobre Ω:

En efecto:

$$\begin{tikzcd}
\Omega & X(\Omega)\subseteq \boldsymbol{R} \\
\omega \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "X\circ h"'] & x=X(\omega) \arrow[d, "h"] \\
 & \boldsymbol{R}
\end{tikzcd}$$

$$(X\circ h)(\omega)=\mathrm{h}(X)(\omega)=h(x)$$

Ejemplo

Ejemplo 1.6. Encontrar la función de probabilidad de $(X-7)^2$, donde X es el puntaje total en dos lanzamientos de un dado balanceado.

Sol. *Los valores posibles de* X *son* 2, 3, .. 12; *sus probabilidades f(x) se pueden obtener como en el ejemplo 2.1, y se pueden tabular como sigue*:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/26	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Se define $Y\equiv(X-7)^2$ *y g la función de probabilidad de Y, el valor de y correspondiente a cada valor de X están dados el la última fila de la tabla. El suceso "Y = 0" corresponde a un solo valor de X, luego*

$$g(0)=P(Y=0)=P(X=7)=f(7)=\tfrac{6}{36}$$

Ejemplo (Cont).

Sin embargo, el suceso "Y = 1" corresponde a dos valores de X, así

$$g(1)=P(Y=1)=P(X=6)+P(X=8)=f(6)+f(8)=\tfrac{5}{36}+\tfrac{5}{36}=\tfrac{10}{36}$$

Continuando de este modo, se encuentran todos los valores de la función de probabilidad g de Y:

y	0	1	4	9	16	25	Total
$G(y)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36	1

En general, si $Y\equiv h(X)$ y g denotan la función de probabilidad de Y, se puede encontrar $g(y)$ sumando $f(x)$ sobre todos los valores x tales que $h(x)=y$. En el caso especial cuando h es inyectiva (uno a uno), la ecuación $h(x)=y$ tiene una solución única $x=h^{-1}(y)$, y entonces

$$g(y)=f\left(h^{-1}(y)\right)$$

Distribución Poisson

Sea μ *un real positivo. Una variable discreta X con distribución de probabilidad*

$$f(x)=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (4.3.1)$$

se dice que tiene distribución Poisson. El parámetro μ *se denomina media de la distribución.* Si se interpretan las probabilidades como frecuencias relativas a largo plazo, entonces μ es el valor promedio o media de los valores de X que se obtendrían con un gran número de repeticiones del experimento.

Propiedades

La probabilidad total en (4.3.1) es

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{-\mu}\left[1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \cdots\right]$$

La serie entre paréntesis cuadrados es la expansión en serie Taylor de e^{μ}, y de aquí que la probabilidad total vale $e^{-\mu}e^{\mu}$ = 1 para todo μ. La razón de dos términos sucesivos (medida de diferencias finitas) de (4.3.1) es

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{\mu}{x} \qquad (4.3.2)$$

Este resultado se puede usar para el cálculo recursivo de $f(x)$.

Aproximación a Poisson de la Distribución Binomial

Si *n* es grande con respecto a *np* entonces la distribución binomial con parámetros *n* y *p* pueden aproximarse por una distribución Poisson con media $\mu = np$; es decir

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \sim \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad (4.3.3)$$

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\mu^x}{x!}\left[\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\cdots\frac{n-x+1}{n}\right]\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}$$

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \sim \frac{\mu^y e^{-\mu}}{x!}$$

Ahora, manteniendo *x* fijo, se hace $n \to \infty$ y $p \to 0$ de tal modo que $\mu = np$ permanece constante. La expresión entre paréntesis cuadrados tiende a 1. ya que es un producto de finitos términos, cada uno de los cuales tiende a 1. Por la misma razón $\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} \to 1$. Finalmente, es un resultado bien conocido de cálculo,

$$Lim\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$$

y combinando estos resultados nos da (4.3.3).

NOTAS (1) Por, (4.3.3), la distribución de Poisson se llama a menudo *ley de los casos raros*. En la aproximación, se iguala la frecuencia esperada de sucesos np con la media μ de la distribución Poisson. La aproximación se aplica cuando np es pequeño en comparación con *n*; es decir, cuando los éxitos son sucesos raros.

(2) También se puede obtener la aproximación Poisson de la distribución binomial para el caso cuando *n* es grande y *n*(1 – *p*) pequeño. Haciendo *q* = 1 – *p* y *y* = *n* – *x*, se tiene

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{y} q^y (1-q)^{n-y} \sim \mu^y e^{-\mu} / y!$$

(3)Para obtener la aproximación Poisson de la distribución hipergeométrica, primero se aplica la aproximación binomial anterior (2.5.2), seguida de una aproximación (4.2.3).

(4)Por los resultados (4.2.2) y (4.2.3), a menudo es posible usar una aproximación Poisson para calcular probabilidad de tiempos de espera. Esto se ilustra en el ejemplo 4.3.2 abajo.

Ejemplo

Ejemplo 4.3.1. La función de probabilidad binomial con parámetros = 100 y *p* = 0.02 es

$$f(x) = \binom{100}{x}(0.02)^x (0.98)^{n-x}; \qquad x = 0, 1, 2,$$

Ya que $\mu = np = 2$, la aproximación de Poisson tiene funci distribución de probabilidad

$$g(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Si se comparan estas funciones para valores pequeños de *x*:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1326	0.2707	0.2734	0.1823	0.0902	0.0353	0.0114
$g(x)$	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.361	0.0120

El acuerdo es muy estrecho (razón próxima a 1) para pequeños valores de pero empeora progresivamente más allá de 4.

Ejercicio

Ejemplo 4.3.2. Consideremos la situación descrita en el problema descrito en el Ejemplo 4.2.2. Sólo el 0.1% de las personas de una gran población tiene cierto tipo raro de sangre. Los individuos son muestreados aleatoriamente en una sola oportunidad. Cuántos individuos deben examinarse para estar el 95% seguros de obtener al menos dos con el tipo raro de sangre?

Ejemplo 4.3.3. Suponga que *n* organismos están distribuid aleatoriamente a través de un volumen V de fluido, así que la probabilid que un organismo específico está localizado en una gota dada de volum D es D/V. La ubicación de los organismos por fuera de la gota se pued pensar como n ensayos independientes con una probabilidad constan D/V de éxito en cada ensayo. Luego el número X de organismos en la go de volumen D tiene distribución binomial con función de probabilidad

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{D}{V}\right)^x \left(1-\frac{D}{V}\right)^{n-x}; \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

En la práctica, n será usualmente muy grande mientras que D/V bastante pequeño. Luego la distribución binomial se puede aproximar p una distribución Poisson con media $\mu = \frac{nD}{V} = \lambda D$, donde $\lambda = \frac{n}{V}$ es número de organismos por volumen unitario de la solución:

$$f(x) \sim (\lambda D)^{-\lambda D} e^{-\lambda D} / x!; \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Procesos Poisson

El proceso de Poisson es un modelo de probabilidad para un experimento en el cual los sucesos ocurren aleatoriamente en el tiempo o el espacio. Existen tres suposiciones básicas que describiremos primeros para los sucesos aleatorios en el tiempo,.

1. *Independencia.* El número de sucesos en intervalos de tiempo independientes no traslapantes. Así el número de sucesos en un intervalo de tiempo (0, *t*] es independiente del número de sucesos en (*t*, *t* + *h*] para cualquier *h* > 0.
2. *Individualidad.* Los sucesos ocurren mas bien individualmente que de a pares o en grupos. Esto significa que si elegimos *h* bastante pequeña, la probabilidad de obtener 2 o más sucesos en el intervalo de tiempo [t, t + h] es despreciable en comparación con la probabilidad de obtener 0 o 1 suceso.
3. *Homogeneidad.* Los sucesos ocurren a una tasa uniforme sobre el periodo de tiempo entero que está siendo considerado. Así el número esperado de sucesos es proporcional a su longitud. El número esperado de sucesos en cualquier intervalo de tiempo es proporcional a esta longitud. El número esperado de sucesos en cualquier intervalo de tiempo es proporcional a su longitud. El número esperado de sucesos en cualquier tiempo *t* es λt donde λ es una constante λ, el número esperado de sucesos en una unidad de tiempo, llamada *parámetro de intensidad* del proceso.

Ejemplo: Accidentes en Carretera

Durante los periodos de alta de las 4:00 a 6:00 p.m. en los fines de semana, accidentes en un tramo de la carretera ocurren a una tasa de 3 por hora. ¿Cuál es probabilidad que ocurran más de 6 accidentes en un periodo de 1 hora? ¿Cuál es probabilidad que o curran a lo más 2 accidentes en un periodo de 2 horas en periodo de alta un día en particular?

3.3. Valor esperado de Vad

Valor esperado de X

Si X *vad* con un conjunto D de valores posibles y cuantía $p(x)$. El ***valor esperado*** o ***valor medio*** de X, denotado $E(X)$ o μ_X es

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$

Ex. Use los datos de abajo para encontrar el número esperada de tarjetas de crédito que poseen los estudiantes.

x = #Tarjetas de crédito

x	$P(x = X)$
0	0.08
1	0.28
2	0.38
3	0.16
4	0.06
5	0.03
6	0.01

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

$$= 0(.08) + 1(.28) + 2(.38) + 3(.16) + 4(.06) + 5(.03) + 6(.01)$$

$$= 1.97$$

Cerca de 2 tarjetas de crédito.

Valor esperado de una función de una va.

Si la *va* X tiene como conjunto de resultados posibles D, y cuantía $p(x)$, entonces el *valor esperado* de cualquier función h(x) es

$$E[h(X)] = \sum_D h(x) \cdot p(x)$$

Reglas de los Valores Esperados

1. Para cualquier constante *a*,
$$E(aX) = a \cdot E(X).$$
2. Para cualquier constante *b*,
$$E(X + b) = E(X) + b.$$
3. $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$

Es decir la esperanza, E(.), es un operador lineal

La varianza y desviación estándar

Sea con cuantía $p(x)$, y valor esperado Entonces la *varianza* de X, denotada μ $V(X)\left(ó\ \sigma_X^2\ \ ó\ \sigma^2\right)$, es

$$V(X)=\sum_D (x-\mu)^2\cdot p(x)=E[(X-\mu)^2]$$

La *desviación estándar* (DE) de X *es*

$$\sigma_X=\sqrt{\sigma_X^2}$$

Ex Los puntajes en las tareas de un estudiante son (0-40):

22, 25, 20, 18, 12, 20, 24, 20, 20, 25, 24, 25, 18

$\mu=21$ Encontrar la varianza y desviación estándar

Valor	12	18	20	22	24	25
Frecuencia	1	2	4	1	2	3
Probabilidad	.08	.15	.31	.08	.15	.23

$$V(X)=p_1(x_1-\mu)^2+p_2(x_2-\mu)^2+\ldots+p_n(x_n-\mu)^2$$

$$V(X)=.08(12-21)^2+.15(18-21)^2+.31(20-21)^2$$

$$+.08(22-21)^2+.15(24-21)^2+.23(25-21)^2$$

$\boxed{V(X)=13.25}$ $\quad \sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{13.25}\approx 3.64$

Fórmula resumida para la varianza

$$V(X)=\sigma^2=\left[\sum_D x^2\cdot p(x)\right]-\mu^2$$

$$=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

Reglas para la Varianza

$$V(aX+b)=\sigma_{aX+b}^2=a^2\cdot\sigma_X^2$$

y

$$\sigma_{aX+b}=|a|\cdot\sigma_X$$

Esto lleva a

1. $\sigma_{aX}^2=a^2\cdot\sigma_X^2,\ \sigma_{aX}=|a|\cdot\sigma_X$
2. $\sigma_{X+b}^2=\sigma_X^2$

3.4. Función de distribución binomial

Experimento Binomial

Un experimento para el cual se satisfacen las siguientes cuatro condiciones se llama un *experimento binomial*.

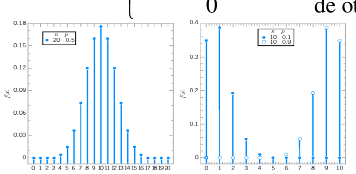
1. El experimento consta de una secuencia de n ensayos.
2. Los ensayos son idénticos, y cada ensayo puede resultar en uno de dos sucesos posibles, denotados éxito (S) o fracaso (F).
3. La probabilidad de éxito es constante de ensayo en ensayo: se denota por p.
4. Los ensayos son independientes.

Notación para la cuantía de una v.a.d. binomial

X = Número de *éxitos* en n ensayos

Ya que la cuantía de una variable aleatoria binomial X depende de dos parámetros n y p, se denota la cuantia por $b(x;n,p)$, o $f_{n,p}(x)$

$$b(x;n,p)=\begin{cases}\binom{n}{p}p^x(1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\ldots n\\ 0 & \text{de otro modo}\end{cases}$$



Ej. Se extrae una carta de un naipe inglés de 52-cartas. Si la extracción de un mismo palo es considerada un éxito, encontrar la probabilidad de

a. Exactamente un éxito en 4 extracciones (con reemplazo).

$\boxed{p = ¼;\ q = 1 - ¼ = ¾}$

$$\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} \quad \boxed{\approx 0.422}$$

b. Sin éxitos en 5 extracciones (con reemplazo).

$$\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} \quad \boxed{\approx 0.237}$$

Notación para la distribución binomial

Para $X \sim B(n, p)$, La distribución acumulativa es

$$P(X \le x) = B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p) \ ,x = 0, 1, 2, \ldots n$$

Media y Varianza

Si $X \sim B(n, p)$, entonces $\mathbf{E(X) = np}$,

$\mathbf{V(X) = np(1 - p) = npq}$, (donde $q = 1 - p$).

Ex. Se extraen 5 cartas con reemplazo, de una naipe inglés de 52-cartas. Si la extracción de cartas de un mismo paro se considera un éxito, encuentre la media, varianza y desviación estándar de X (donde X es el número de éxitos).

$\boxed{p = ¼;\ q = 1 - ¼ = ¾}$

$$\boxed{\mu = np = 5\left(\frac{1}{4}\right) = 1.25}$$

$$\boxed{V(X) = npq = 5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 0.9375}$$

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{0.9375} \approx 0.968}$$

Ej. Si la probabilidad de que un estudiante pase de este curso (con 4 o más) es 0.82, encontrar la probabilidad que dado 8 estudiantes

a. Los 8 pasen. $\binom{8}{8}(0.82)^{8}(0.18)^{0}$ $\boxed{\approx 0.2044}$

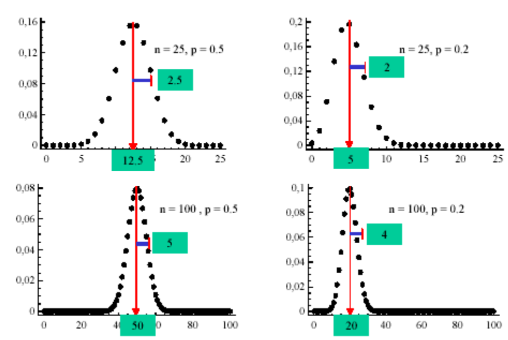
b. Ninguno pase $\binom{8}{0}(0.82)^{0}(0.18)^{8}$ $\boxed{\approx 0.0000011}$

c. Al menos 6 pasen.

$$\binom{8}{6}(0.82)^{6}(0.18)^{2} + \binom{8}{7}(0.82)^{7}(0.18)^{1} + \binom{8}{8}(0.82)^{8}(0.18)^{0}$$

$$\approx 0.2758 + 0.3590 + 0.2044 \quad \boxed{= 0.8392}$$

Distribuciones binomiales



Ejemplo

Un contrato estipula la compra de componentes en lotes grandes que deben contener un máximo de 10% de piezas con algún defecto. Para comprobar la calidad se toman 11 unidades y se acepta el lote si hay como máximo 2 piezas defectuosas. ¿Es un buen procedimiento de control?

Sea p la proporción de piezas en un lote,

$X \equiv$ Número de defectuosas en la muestra

$P(\text{Aceptar}) = P(X \le 2)$

$$= \binom{11}{0}p^{0}(1-p)^{11} + \binom{11}{1}p^{1}(1-p)^{10} + \binom{11}{2}p^{2}(1-p)^{9}$$

p	5%	10%	15%	20%	25%
$P(Aceptar)$	0.985	0.910	0.779	0.617	0.45

3.5.Distribuciones Hipergeométricas y Binomial Negativas

Hay tres suposiciones que llevan a una distribución hipergeométrica

1. El conjunto o población muestreada tiene N individuos, objectos, o elementos (población finita).
2. Cada individuo puede ser caracterizada como éxito (S) o fracaso (F), y hay M éxitos en la población.
3. Se selecciona una muestra de n individuos sin reemplazo de tal modo que cada subconjunto de tamaño n es igualmente probable de ser elegidos

Distribución Hipergeométrica

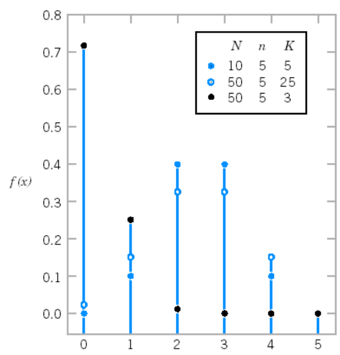
Si X es el número de (éxitos) S en una muestra completamente aleatorizada de tamaño n extraida de una población que consta de M objetos S y $(N – M)$ F, entonces la distribución de probabilidad de X, llamada distribución hipergeométrica, está dada por

$$P(X=x)=h(x;n,M,N)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

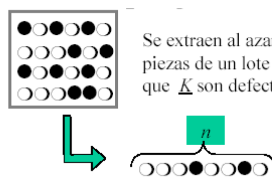
$$\max(0,n-N+M)\le x\le \min(n,M)$$

$$E(X)=n\cdot\frac{M}{N}\qquad V(X)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\cdot n\cdot\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)$$

Cuantía hipergeométrica



Dist. Hipergeométrica (*N,M,n*)



Se extraen al azar y sin reposición n piezas de un lote de N en total de las que K son defectuosas (N pequeño).

X = "Número de piezas defectuosas al extraer n"

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad k=0,1,2,\dots,n \quad y \quad n-(N-K)\le k\le K$$

Distribución Geométrica

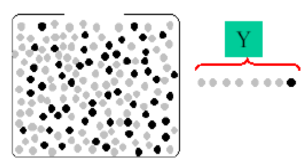
Supongamos se realiza un sucesión de ensayos independientes Bernoulli, cada uno con probabilidad p de éxito, 0<p<1.

Sea X el número de ***ensayos*** hasta que ocurre el pirmer éxito.

Entonces X es una *vad* llamada *geométrica.* El rango de X está dado por R(X) ={1, 2, 3, …}

- La función de cuantía de X está dada por
  h(x; n,M, N)= P({X=x}) = $(1- p)^{x-1}$ p, x=0, 1, …
- Este modelos se sigue del hecho que los primeros (x-1) ensayos resultaron en fracasos y que el x-ésimo ensayo fue un éxito

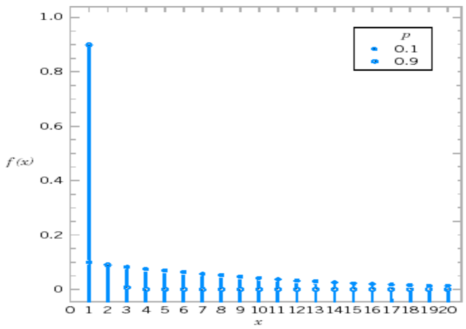
Distribución Geométrica (p)



Proporción defectuosas = p

Y = "Piezas extraídas hasta que aparezca una defectuosa"

Cuantía geométrica



Distribución Geométrica

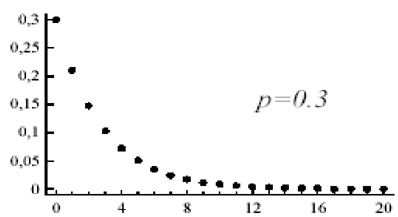
Distribución de probabilidad geométrica *(p)*

●	1	→	p
○●	2	→	$(1-p)p$
○○●	3	→	$(1-p)^2p$
↓			↓
○○○...●	k	→	$(1-p)^{k-1}p$

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,3,...$$

Distribución Geométrica

$$E[Y]=\frac{1}{p}, \qquad Var[Y]=\frac{1-p}{p^2}$$



Distribución Binomial Negativa

La *vad binomial negativa* y su *distribución* están basadas en un experimento que satisface las siguientes cuatro condiciones:

1. El experimento consiste en una sucesión de ensayos independientes.
2. Cada ensayo puede resultar en éxito (S) o un fracaso (F).
3. El experimento continua hasta que se hayan observado un total de r éxitos, donde r es un entero positivo específico.
4. La probabilidad de éxito es constante de ensayo en ensayo, de tal modo que $P(S$ en el ensayo $i) = p$ para i = 1, 2, 3, …

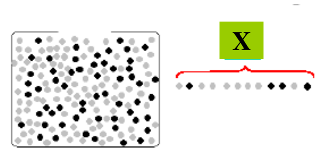
Cuantía de una Binomial Negativa

La cuantía de una v.a.d. X = *número de ensayos hasta que se observe el the r ^mo^ suceso, con* parámetro r = número de *éxitos,* is

$$Nb(x,r;p)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}, x=r,r+1,..$$

$E(X) = r/p$, $V(X)= r(1-p)/p^2$

Dist. Binomial Negativa (*r,p*)



Ejemplo r = 4

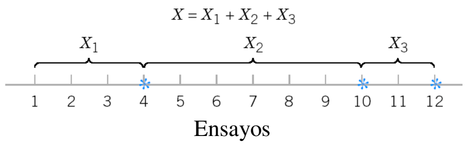
Proporción defectuosas = p

X = "Piezas extraídas hasta que aparezcan r defectuosas"

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}, \quad k=r,r+1,r+2,....$$

Distribuciones geométricas y Binomial Negativas

$X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots \overset{iid}{\sim} \text{Geom.}(p)$



* Indica un ensayo que resultó en éxito

Las variables binomial negativa se representan **como sumas** Negative binomial random variable represented as a sum of geometric random variables.

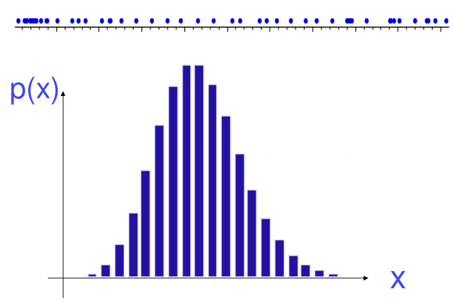
3.6. Distribución Poisson

Una vcariable aleatoria X se dice que tienen una ***Distribución Poisson*** con parámetro λ

($\lambda > 0$), si X cuenta el número de ocurren-cias de un suceso E y la cuantía de X es

$$p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2 \ldots$$

Cuantía Poisson

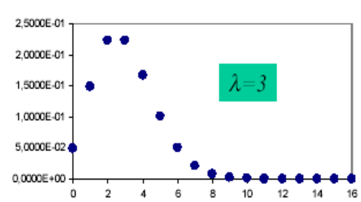


Ejemplos

- Número de defectos aparecidos en tramos de longitud fija de hilos de cobre.
- Número de partículas por centímetro cúbico en líquidos con sustancias en suspensión.
- Emisiones radiactivas: número de partículas emitidas en intervalos de tiempo fijo.
- Número de llamadas a una centralita de teléfonos en un día

Ejemplo

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,..$$



Ejemplo

Una fuente radiactiva emite partículas según la distribución de Poisson de media 10 partículas por minuto. Se desea calcular:

- Probabilidad de 5 partículas en un minuto
- Probabilidad de 0 partículas en un minuto
- Probabilidad de más de 5 partículas en un minuto.
- Probabilidad de al menos 30 partículas en 5 minutos.

Solución

1. $P(X=5)=e^{-10}\dfrac{10^5}{5!}=0.0378$
2. $P(X=0)=e^{-10}=4.54E-15.$
3. $P(X>5)=1-P(X\leq 5)$

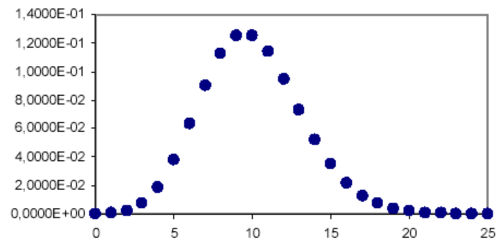
$$=1-e^{-10}\sum_{x=0}^{5}\frac{10^x}{x!}=0.933.$$

4. $Y\equiv$ Nº de partículas en 5 minutos

$\lambda' = 5\times 10 = 50$

$$P(Y\leq 30)=e^{-50}\sum_{x=0}^{30}\frac{50^x}{x!}=0.0016$$

Poisson de media 10



Distribución Poisson como Límite

Supongamos que en una cuantía binomal $b(x;n,\ p)$, en la cual se tiene np se aproxima a un valor $n\to\infty$ **y** $p\to 0$

Entonces $b(x;n,p)\to p(x;\lambda).\ \lambda>0.$

Varianza y media de una distribución Poisson

Si X tiene distribución Poisson con parámetro λ, entonces

$$E(X)=V(X)=\lambda$$

Límite de la dist. binomial

$$P_X(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\qquad p=\frac{\lambda}{n}$$

$$P_X(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\to 1}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\ldots$$

Procesos Poisson

Tres suposiciones:

1. Existe un parámetro $\alpha>0$ tal que en cualquier intervalo corto de longitud Δt, la probabilidad de que se reciba exactamente un suceso es $\alpha\cdot\Delta t+o(\Delta t)$.
2. La probabilidad de más de un suceso durante Δt es $o(\Delta t)$.
3. El número de sucesos durante un intervalo de tiempo Δt es independiente del número de ocurrencias previas a este intervalo de tiempo.

Procesos Poisson

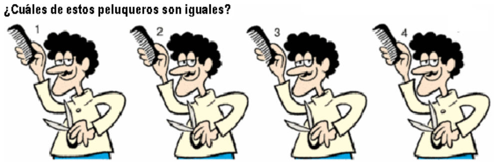
$$P_k(t)=e^{-\alpha t}\cdot(\alpha t)^k/k!,$$

De tal modo que el número de pulsos (sucesos) durante un intervalo de tiempo de largo Δt es una variable aleatoria Poisson con parámetro αt

El número de pulsos (sucesos) esperados durante cualquiera de tales intervalos de tiempo es $\lambda=\alpha t$.

Tareas

¿Cuáles de estos peluqueros son iguales?



Además formar grupos para hacer hacer la siguiente serie de problemas:

Cap 03: S3.1: 06 a 09 ; S3.2: 11 a 17 ; S3.3:29 a 37 y el 43 ;

S3.4: 46 a 51; S3.5: 62 a 65; S3.6: 75 a 79 y finalmente

Complementarios: 109 a 112

Vienen: Variables Aleatorias Continuas

Cáp- 04

Distribuciones Bivariadas

Sean X y Y variables discretas definidas sobre el mismo conjunto muestral con rangos $X(\Omega)$ y $Y(\Omega)$. El conjunto muestral es $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, el conjunto de los i tal que $X(i) = x$, $Y(i) = y$ es el suceso "$X = x, Y = y$". La función de probabilidad conjunta de X y Y es una función de dos variables:

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y \qquad (4.5.1)$$

Similarmente, la *función de distribución acumulativa conjunta* de X y Y definida como sigue:

$$F(s,t) = P(X \le s, Y \le t) \qquad -\infty \le s \le \infty,\ -\infty \le t \le \infty \qquad (4.5.2)$$

La función de probabilidad conjunta y la f.d.a. de la primera variable aleatoria X serán denotadas f_1 y F_1; aquellas de la segunda variable Y serán denotadas f_2 y F_2.

Marginales

Para obtener las probabilidades de sólo X, se suma la función de probabilidad sobre todos los valores de y (lo mismo para la f.d.a. de X):

$$f_1(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f(x, y); \qquad (4.5.3)$$

$$f_2(y) = P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x f(x, y); \qquad (4.5.4)$$

Del mismo modo se pueden obtener f_2 y F_2. Si se arreglan las probabilidades en una tabla de doble entrada, entonces $f_1(x)$ y $f_2(y)$ se pueden obtener como totales marginales de (totales de fila y columna) en la tabla. Por esta razón, cuando se considera una variable

Ejemplo

Ejemplo 4.5.1. Se reparte una mano de poker de un naipe bien revuelto. Der la función de probabilidad conjunta y margina de X, el número de ases, y de Y, número de reyes, y encuentre la probabilidad que $X = Y$.