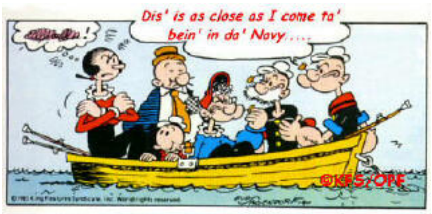
## Tema 4: Variables Aleatorias Contínuas




Prof. Heriberto Figueroa S.
Otoño 2009



## *Capítulo 4*

## *Variables Aleatorias Continuas y sus Distribuciones de Probabilidad*

### *4.1. Variables Aleatorias Continuas*

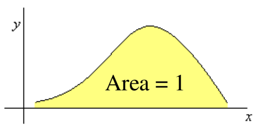
Una variable aleatoria $X$ se dice ***continua*** si su conjunto de valores posibles es un continuo de valores (es decir, un intervalo de números reales). Para $a < b$ números reales, entonces es posible cualquier número $x$ entre $a$ y $b$).



### *Función Densidad de Probabilidad*

Una v.a. X se dice que tiene función densidad de probabilidad, si existe la derivada $\partial F(x)/dx = f(x)$ para todo $x$ (salvo posiblemente en un número finito). $f(x)$ se llama brevemente *densidad*.

1. $f(x) > 0$ para todo valor de $x$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

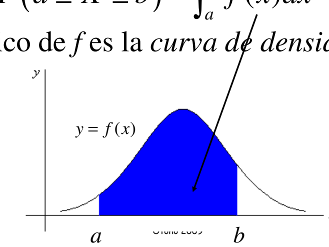





*Sea* $X$ una v.a.c. Entonces una ***función de densidad de probabilidad*** de $X$ es una función $f(x)$ tal que para dos números cualesquiera $a$ y $b$,

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

El gráfico de $f$ es la *curva de densidad*.






## *Probabilidad para una V.A. Continua*

Si $X$ *es una v.a.c*, entonces para cualquier número $c$, $P(x = c) = 0$. Para dos números cualesquiera $a$ y $b$ con $a < b$,

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b)$$
$$= P(a \le X < b)$$
$$= P(a < X < b)$$



## Diferencias importantes entre cuantías y densidades

$Y$, una v.a.d. con cuantía $f(y)$
X, una v.a.c. con densidad $f(x)$;

- $f(y)$=P($Y = k$) = la probabilidad que el suceso sea $k$.
- $f(x)$ es una función particular con la propiedad que para cualquier suceso $A$ = (a,b), P($A$) es la integral de $f$ sobre $A$

$$P(A) = \int_A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(X = k) = \int_k^k f(x)dx = 0$$

**Ej 1.** (4.1) X = cantidad de tiempo en el cual un libro de la reserva limitada a 2 horas en la biblioteca de una universidad es chequeado por la selección al azar de estudiante y supongamos que X tiene como función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$a.\ P(x \le 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} 0.5xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 = 0.25$$

$$b.\ P(0.5 \le x \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} 0.5xdx = 0.5$$

$$c.\ P(x > 1.5) = \int_{1.5}^{2} 0.5xdx = 0.4375$$



## Distribución Uniforme

*Una v.a.c. X* se dice que tiene *distribución uniforme* en el intervalo $[a, b]$, escrito X ~ U (a,b) si la densidad de X es

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{Tov} \end{cases}$$



**Ej 2.** X ~ U (a, b)

a) Given b > a, f (x) $\geq 0$

b) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$

---

Let X ~ U (0, 1)

P(X<0.5) = 0.5
P(0.1<x< 0.9 ) = 0.9 - 0.1 = 0.8
P(X > 0.35) = 1 – P(X< 0.35) = 1- 0.35 = 0.65

P(a<X<b) = (b – a)



## Distribución Exponencial

$$X \sim Exp(\lambda)$$

X se dice que tiene distribución exponencia si para algún $\lambda > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



**Ej 3.** Considemos un fabricante de ampolletas que tienen una esperanza de vida media de 3000 horas. Se garantiza el reembolso del dinero si la ampolleta falla antes de 300 horas. ¿Qué proporción de las ventas de la compañía se podría ocupar si se necesita hacer reembolsos de dinero?

Sea X = tiempo que la ampolleta permanece operable, entonces el objetivo es encontrar P(X<300)

$$X \sim Exp(\lambda) \quad \lambda = 3000, \quad f(x) = \frac{1}{3000}e^{-x/3000}$$

$$P(X < 300) = \int_0^{300} \frac{1}{3000}e^{-\frac{x}{3000}}dx = \int_0^{0.1} e^{-u}du$$

$$-e^{-u}\Big|_0^{0.1} = -0.9 + 1 = 0.10$$



## *4.2. Funciones de Distribución Acumulativas y Valores Esperados*

La función de distribución acumulada, $F(x)$ para una v.a.c., $X$, también se puede escribir, para todo número $x$, como

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

## Uso de $F(x)$ para Calcular Probabilidades

Sea $X$ be una v.a.c. con densidad $f(x)$ y distribución $F(x)$. Entonces para cualquier número $a$,

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

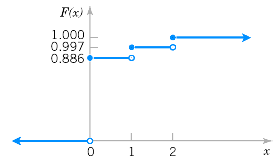
Y para dos números cualesquiera $a$ y $b$ con $a < b$,

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$



## Función de Distribución Acumulada

| Suceso concerniente a X | Probabilidad del suceso en términos de X | Suceso concerniente a X | Probabilidad del suceso en términos de X |
|---|---|---|---|
| $X \le a$ | $F(a)$ | $a < X \le b$ | $F(b) - F(a)$ |
| $X > a$ | $1 - F(a)$ | $a < X < b$ | $F(b-) - F(a)$ |
| $X < a$ | $F(a-)$ | $a \le X \le b$ | $F(b) - F(a-)$ |
| $X \ge a$ | $1 - F(a-)$ | $a \le X < b$ | $F(b-) - F(a-)$ |
| $X = a$ | $F(a) - F(a-)$ | | |






## Valor Esperado

El *valor esperado* o *valor medio* de una una v.a.c. $X$ con densidad $f(x)$ es

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

*Cuando existe la integral*



## *Valor esperado de h(X)*

*Si* $X$ es v.a.c. con densidad $f(x)$ y $h(x)$ es cualquier función de $X$, entonces

$$E[h(x)] = \mu_{h(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\,dx$$

***f* es la densidad de *X***



## Varianza y Desviación Estándar

La *varianza* de una v.a.c. $X$ con densidad $f(x)$ y media $\mu$ es

$$\sigma_X^2 = V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$= E[(X-\mu)^2]$$

La ***desviación estándar*** es $\sigma_X = \sqrt{V(x)}$.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$ ⇦ **Fórmula de Cálculo**



## Mediana de una Distribución

La ***mediana***, de una distribución contínua denotada $\tilde{\mu}$, es el percentil 50avo. Así $\tilde{\mu}$ satisface $0.5 = F(\tilde{\mu})$. Es decir, la mitad del área bajo la curva de densidad está a la izquierda de $\tilde{\mu}$.

## Percentiles

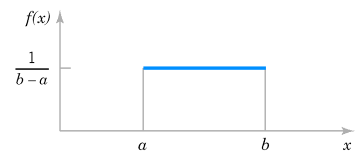
Sea $p$ un número entre 0 y 1. El *percentil* $(100p)^{avo}$ de la distribución de una v.a.c. $X$ denotado por $\eta(p)$, está definido por

$$p = F\left(\eta(p)\right) = \int_{-\infty}^{\eta(p)} f(y)dy$$



## Distribución uniforme continua

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b \ \ y \ \ 0 \ \ tov$$






## Ej 4. X ~ U (a,b), ¿EX, Var(X) ?

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad X \subseteq (a,b)$$

$$EX = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2)$$

$$= (a+b)/2$$

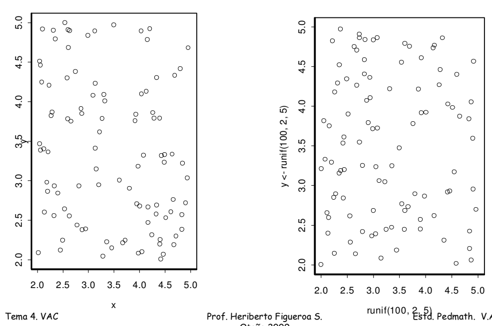
$$EX^2 = \int_a^b x^2 \ f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b$$

$$= (a^2 + ab + b^2)/3$$

$$Var = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{12}(a-b)^2$$



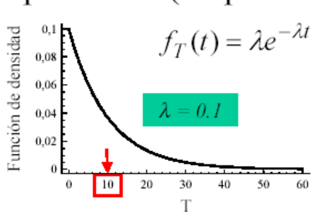
## Ubicación de 100 puntos aleatoriamente en un cuadrado






## Propiedades (Exponencial)

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

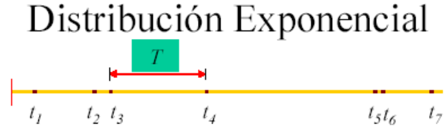



$$E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t)dt = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[T] = E[T^2] - E[T]^2 = \int_0^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$



## Distribución Exponencial

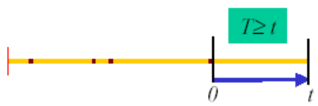



Ejemplo: Fabricación continua de conductor de cobre.

λ ≡ Número medio de defectos cada 100 m

$T \equiv$ "Distancia entre dos defectos"

# Distribución Exponencial

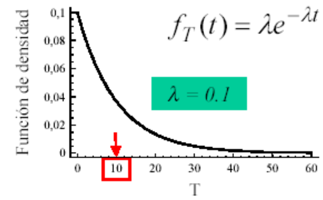



$$P(T \geq t) = P\{0 \text{ defectos en el intervalo } [0,t)\}$$
$$= e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$
$$F_T(t) = P(T \leq t)$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$



# Propiedades (Exponencial)




$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

$$E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t)dt = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[T] = E[T^2] - E[T]^2 = \int_0^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$



Ej 5. $X \sim Exp(\lambda)$ ¿ EX, Var(X) ?

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad X > 0, \lambda > 0$$

$$EX = \int_0^{\infty} x f(x)dx = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx = \lambda$$

$$EX^2 = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx = 2\lambda^2$$

$$Var = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2$$



Ej 6. Para personas infectadas con cierta forma de malaria, el tiempo X que permanecen en remisiones está descrito por la siguiente densidad,

$$f(x) = \frac{1}{9} x^2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

¿Cuál es el tiempo promedio que tales pacientes permanecen en remisión?

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^3 x \frac{1}{9} x^2 dx = \left. \frac{x^4}{36} \right|_0^3 = 2.25 \text{ años}$$



Ej 6 (Cont.). X =Tiempo en remisión, y

$$f(x) = \frac{1}{9} x^2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

¿Cuál es la probabilidad que un paciente de malaria permanezca en remisión durante todo un año?

$$P(X > 1) = \int_1^3 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{9} \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{1}{27}(27 - 1) \approx 96.29\%$$



# Obtención de $f(x)$ a partir de $F(x)$

Si $X$ es una v.a.c. con densidad $f(x)$ distribución $F(x)$, entonces para todo número para el cual la derivada es

$$F'(x) = f(x).$$

Ej 7. Una v.a.c. X tiene la función de distribución que se muestra abajo, encontrar la correspondiente densidad $P(1/2 < X \le 3/4)$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases} \qquad f(x)=F(x)'=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0\le x<1\\ 0 & x\ge 1\end{cases}$$

Método 1: $P(\frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4})=F(\frac{3}{4})-F(\frac{1}{2})=\frac{9}{16}-\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

Método 2: $P(\frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4})=\int_{1/2}^{2/4}2x\,dx=x^2\Big|_{1/2}^{3/4}=\frac{5}{16}$



Ej 8. X =tiempo de remisión, y

$$f(x)=\frac{1}{9}x^2,\quad 0\le x\le 3$$

$\mu = EX = 2.25$ *años* ¿$\tilde{\mu}$?

$$P(X<\mu)=\int_o^m \frac{1}{9}x^2dx=\frac{m^3}{27}=\frac{1}{2}$$

$\tilde{\mu}=\sqrt[3]{\frac{27}{2}}=2.38$ *años* "asimetría izquierda"



## 4.3. Distribución Normal

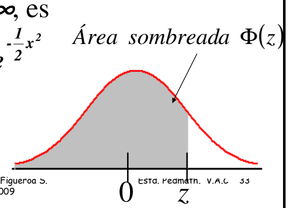
### Distribución Normal Estándar

Una v.a.c. Z, se dice que tiene una ***distribución normal estándar***, escrito $X \sim N(0,1)$ si su densidad, para $-\infty < z < \infty$, es

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

La Distribución es

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$






### Distribución Normal Estándar

Sea $Z$ la distribución normal estándar. Encuentre (de la tabla)

a. $P(Z\le 0.85)$

Área a la izquierda de $0.85 = 0.8023$

b. $P(Z>1.32) = 1-P(Z\le 1.32)=0.0934$

c. $P(-2.1\le Z\le 1.78) = P(Z\le 1.78)-P(Z\le -2.1)$

$= 0.9625 - 0.0179 = 0.9446$



### Distribución normal estándar

Ej 9. Sea $Z$ variable normal estándar. Encuentre (de la tabla)

*a.* $P(Z\le 1.25)=\Phi(1.25)=0.8944$

*b.* $P(Z>1.25)=1-\Phi(1.25)=1-0.8944=0.1056$

*c.* $P(Z\le -1.25)=\Phi(-1.25)=0.1056=P(Z>1.25)$

*d.* $P(Z>-1.25)=1-\Phi(-1.25)=0.8944=P(Z\le 1.25)$



*e.* $P(-2.1\le Z\le 1.78)$

Encontrar el área a la izquierda de $1.78$ y se sustrae enseguida el área a la izquierda de –2.1.

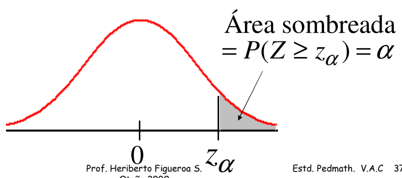
$= P(Z\le 1.78)-P(Z\le -2.1)$

$= 0.9625 - 0.0179$

$= 0.9446$

## $z_\alpha$ Notación

$z_\alpha$ denotará el valor sobre el eje de medición para el cual el área bajo la curva $z$ está a la derecha de $z_\alpha$.






Ej. Sea $Z$ una variable normal estándar. Encuentre $z$ si. $P(Z < z) = 0.9278$.

Mire la tabla y encuentre una entrada = 0.9278 entonces lea hacia atrás para encontrar el valor pedido

$\boxed{z = 1.46.}$

b. $P(-z < Z < z) = 0.8132$

$$P(z < Z < -z) = 2P(0 < Z < z)$$
$$= 2[P(z < Z) - ½]$$
$$= 2P(z < Z) - 1 = 0.8132$$
$$P(z < Z) = 0.9066 \qquad \boxed{z = 1.32}$$



Ej 11.( $z_\alpha$ y percentil). Denotemos por $z_\alpha$ al valor de Z para el cual $P(Z \ge z_\alpha) = \alpha$ Por definición, de rango intercuartílico (IQR), para la curva normal estándar es la diferencia de $Q = z_{0.25} - z_{0.75}$

Encuentre Q.

$$Q = z_{0.25} - z_{0.75} = 0.67 - (-0.67) = 1.34$$

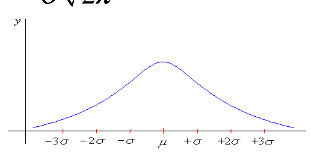


### *4.3. Distribución Normal*

Una v.a.c. $X$ se dice que tiene distribución normal con parámetros $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ ,

Si la densidad $f$ está dada por

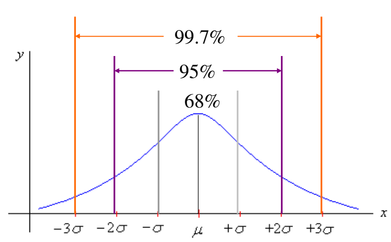
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$





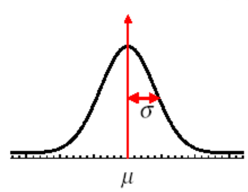

## Curva Normal

Porcentaje aproximado de área dentro de desviaciones estándar dadas (regla empírica).






## Medidas Características

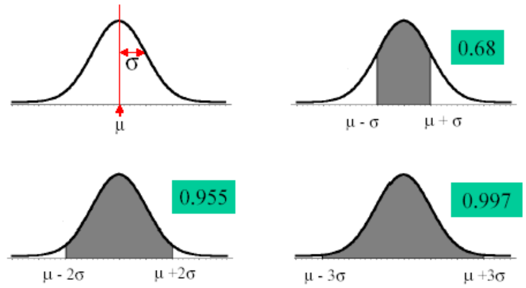



$$X \to N(\mu, \sigma)$$

$E[X] = \mu$ $\qquad Var[X] = \sigma^2$

$E[(X-\mu)^3] = 0$ $\qquad E[(X-\mu)^4] = 3\sigma^4$

Asimetría = 0 $\qquad$ Curtosis = 3.

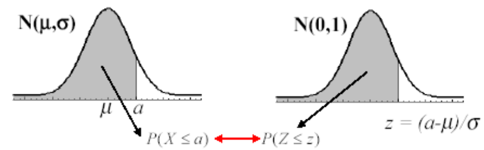





# Estandarización

$$X \to N(\mu,\sigma) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)$$

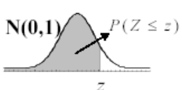
$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$






***TABLA***

*Normal Estandar*



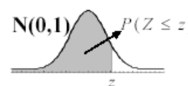

Ejemplo.

$P(Z \le 1.96) = 0.9750$

| z | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0,1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0,2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0,3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0,4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0,5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0,6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0,7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0,8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0,9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1,0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1,1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1,2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1,3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1,4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1,5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1,6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1,7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1,8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1,9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2,0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2,1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2,2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2,3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2,4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2,5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2,6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2,7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2,8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2,9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3,0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |



# Tabla




| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,1 | .9990323 | .9990645 | .9990957 | .9991259 | .9991552 | .9991836 | .9992111 | .9992377 | .9992636 | .9992886 |
| 3,2 | .9993128 | .9993363 | .9993590 | .9993810 | .9994023 | .9994229 | .9994429 | .9994622 | .9994809 | .9994990 |
| 3,3 | .9995165 | .9995335 | .9995499 | .9995657 | .9995811 | .9995959 | .9996102 | .9996241 | .9996375 | .9996505 |
| 3,4 | .9996630 | .9996751 | .9996868 | .9996982 | .9997091 | .9997197 | .9997299 | .9997397 | .9997492 | .9997584 |
| 3,5 | .9997673 | .9997759 | .9997842 | .9997922 | .9997999 | .9998073 | .9998145 | .9998215 | .9998282 | .9998346 |
| 3,6 | .9998409 | .9998469 | .9998527 | .9998583 | .9998636 | .9998688 | .9998739 | .9998787 | .9998834 | .9998878 |
| 3,7 | .9998922 | .9998963 | .9999004 | .9999042 | .9999080 | .9999116 | .9999150 | .9999184 | .9999216 | .9999247 |
| 3,8 | .9999276 | .9999305 | .9999333 | .9999359 | .9999385 | .9999409 | .9999433 | .9999456 | .9999478 | .9999499 |
| 3,9 | .9999519 | .9999538 | .9999557 | .9999575 | .9999592 | .9999609 | .9999625 | .9999640 | .9999655 | .9999669 |
| 4,0 | .9999683 | .9999696 | .9999709 | .9999721 | .9999733 | .9999744 | .9999755 | .9999765 | .9999775 | .9999784 |



# Ejemplo (Normal)

La longitud X de ciertos tornillos es una variable aleatoria con distribución normal de media 30 mm y desviación típica 0.2 mm. Se aceptan como válidos aquellos que cumplen 29.5 < X < 30.3.

- Proporción de tornillos no aceptables por cortos.
- Proporción de tornillos no aceptables por largos.
- Proporción de tornillos válidos.

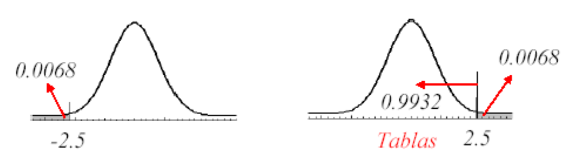


# Ejemplo (Solución)

$$X \to N(30, 0.2) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)$$

1. $P(X \le 29.5) = P\left(\frac{X-30}{0.2} \le \frac{29.5-30}{0.2}\right)$

$$= P(Z \le -2.5) = \Phi(-2.5) = 0.0068$$



2. $P(X \geq 30.4) = P(\frac{X-30}{0.2} \geq \frac{30.4-30}{0.2})$

$= P(Z \geq 2.0) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$

3. $P(\text{"}Defectuosas\text{"}) = 0.0228 + 0.0068 = 0.0296$

$Y \equiv N^{o}$ de piezas defectuosa en un lote de 1000

$E[Y] = 1000 \times 0.0296 = 29.6$



## Distribuciones Normales No Estándar

Si $X$ tiene distribución normal con media $\mu$ y desviación estándar $\sigma$, entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Tiene distribución normal estándar



Ej. Sea $X$ una variable aleatoria normal con $\mu = 80$ y $\sigma = 20.$
Encuentre $(X \leq 65)$.

$$P(X \leq 65) = P\left(Z \leq \frac{65-80}{20}\right)$$

$$= P(Z \leq -.75)$$

$$= 0.2266$$



## Características de las curvas normales

- Simétrica y con forma de campana.
- Probabilidad que un valor esté dentro de k desviaciones estándar de la media.
- Localización y forma caracterizada completamente por medio de la media y la desviación estándar.



Ej. Una peste particular ha surgido en una escuela primaria. Se ha determinado que el tiempo de permanencia de la peste tiene distribución normal con

$$\mu = 6 \;\; días \;\; y \;\; \sigma = 1.5 \;\; días$$

Encontrar la probabilidad que para un estudiante seleccionado al azar, la peste le durará entre 3.75 y 9 días.



$$P(3.75 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{3.75-6}{1.5} \leq Z \leq \frac{9-6}{1.5}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.9772 - 0.0668 = 0.9104$$

Percentiles de una distribución normal arbitraria

$$\begin{array}{l}(100p)^{\text{avo}} \text{ percentil} \\ \text{de normal}\end{array} = \mu + \left(\begin{array}{l}(100p)^{\text{avo}} \text{ percentil} \\ \text{de normal estándar}\end{array}\right)\sigma$$

## Z score

$$X \sim N(\mu,\sigma^2), \qquad Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$P(a\le X\le b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X\le a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\le\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X\ge b)=1-P(X<b)=1-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Ej 14. Una persona será considerada como DUI si la concentración de alcohol en la sangre, X, es 0.10%. Aunque los analizadores del aliento usados para este propósito son notablemente precisos, las máquinas muestran una cierta cantidad de error de medición. Repitiendo las mediciones con al analizador de aliento (X) tomadas en una misma persona produce una distribución de las respuestas que se puede describir mediante una densidad normal con

μ = Concentración verdadera el alcohol en la sangre de una persona

σ = 0.004%.

¿Cuales son las oportunidades que una persona sea incorrectamente boleteada con una multa por DUI, si esta persona tiene una concentración verdadera de 0.095%?



$$X \sim N(0.095,\ 0.004^2)$$

$$P(arresto\ \ DUI)=P(X\ge 0.10)$$

$$=P\left(\frac{X-0.095}{0.004}\ge\frac{0.10-0.095}{0.004}\right)$$

$$=P(Z\ge 1.25)=1-P(Z<1.25)=1-\Phi(1.25)$$

$$=1-0.8944=0.1056$$



## Percentiles de una Distribución Normal Arbitraria

$z_\alpha$ *es el* $100(1-\alpha)^{avo}$ percentil de la distribución normal estándar

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=z_\alpha$$

$(100p)^{\text{avo}}$ percentil de normal X ~N$(\mu,\sigma)$ $=\mu+z_\alpha\sigma$



Ej 14. Mensa es una socieda internacional dedicada a fines intelectuales. Cualquier persona con un IQ en el 2% superior de la población general es elegible para unírseles. ¿Cuánto es el menor IQ que calificaría a una persona para pertenecer a la sociadad? Suponga que los IQ tienen distribución normal con $\mu=100$ y $\sigma=16$

Así, X = valor de IQ, X ~ N(100, 256)

$$P(X\ge x_l)=0.02 \text{ ó } P(X<x_l)=0.98$$

$$P(X<x_l)=P\left(\frac{X-100}{16}<\frac{x_l-100}{16}\right)=P\left(Z<\frac{x_l-100}{16}\right)=0.98$$

$$P(Z<2.05)=P(Z<z_{0.02})=0.9798\approx 0.98$$

$$Así\ \ \frac{x_l-100}{16}=2.05\Leftrightarrow x_l=100+2.05\times 16=133$$



## Aproximación Normal para la Distribución Binomial

Sea $X$ una v.a.d. binomial basada en $n$ ensayos, cada uno con una probabilidad $p$ de ocurrencia. Si el histograma de probabilidad binomial no es muy asimétrico ($\mu=np$ y $\sigma=\sqrt{npq}$. ), entonces $X$ se puede aproximar por una distribución normal con

$$P(X\le x)\approx\Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

## Continuity correction

$$P(c \le Y \le d) \approx \int_{c-\frac{1}{2}}^{d+\frac{1}{2}} f(x)dx$$

Reemplazando los límites $c$ y $d$ por $c - 1/2$ y $d + 1/2$ se llama *corrección por continuidad.* Es lo apropiado para cualquier distribución de probabilidad discreta está siendo aproximada por un área bajo la curva.



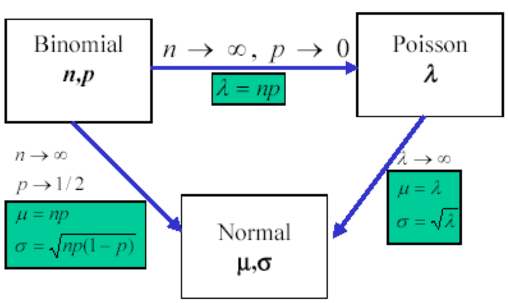
## Detalle de la Aproximación de la Normal a la Distribución Binomial

X ~ Bin ($n$, $p$), donde $np>10$ ó $nq>10$, entonces

$$P(X \le x) = P(X \le x+0.5)$$
$$= P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
$$\approx P\left(Z \le \frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

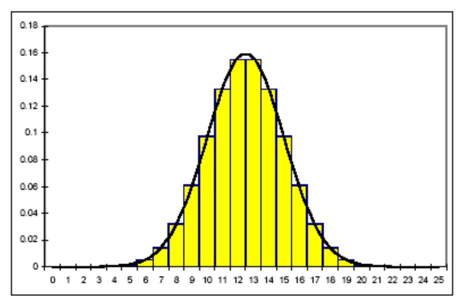


## Binomial-Poisson-Normal



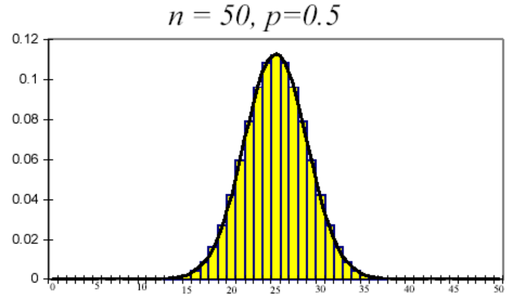



## Aproximación Binomial-Normal n=25, p=1/2



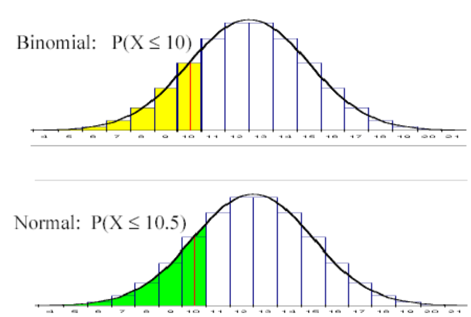


## Aproximación de Normal y Binomial *n = 50, p=0.5*

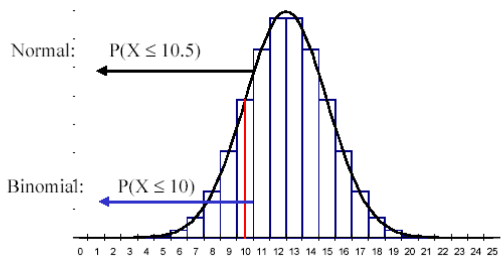




## Corrección por continuidad

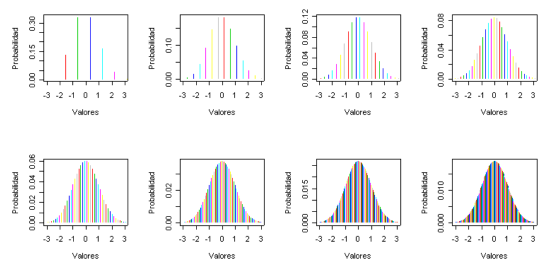


# Corrección por continuidad






# Comparación de binomiales normalizadas para p = 1/3 y n = 5, 20, 50,. 100, 500, 1000 y 5000.






Se ha tomado una muestra de 45 piezas de un proceso que fabrica un promedio de 25% de piezas fuera de especificación.

1.¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra haya exactamente 13 elementos defectuosos?

Cálculo exacto : $X \rightarrow \text{Binomial}(n = 45,\ p = 0.25)$

$$P(X = 13) = \binom{45}{13} 0.25^{13} 0.75^{32} = 0.110$$

Aproximación Normal : $Y \rightarrow N(11.25,\ 2.9)$

$$P(X = 13) = P(12.5 \le Y \le 13.5) = 0.1142$$

2.¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga 13 o más piezas defectuosas?

$$E : P(X \ge 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + \cdots + P(X = 45) = 0.325$$

$$A : P(Y \ge 12.5) = 1\text{-}\tilde{O}\left(\frac{12.5\text{-}11.25}{2.9}\right) = 1 - \tilde{O}(0.4310) = 0.333$$



# Plan de muestreo simple por atributos

Una compañía recibe lotes con un gran número de piezas. Según el contrato cada lote debe tener como máximo una proporción de piezas defectuosas igual $p_A$ *(AQL)*.

Un plan de muestreo simple por atributos consiste en determinar

*n:* número de piezas muestreadas

*c:* número máximo de piezas defectuosas en la muestra

De forma que si X es el número de piezas defectuosas en la muestra se aplica la siguiente regla:

$x \le c$ se acepta el lote
$x > c$ se rechaza el lote



# Riesgos del vendedor y comprador

- **Riesgo del vendedor**: Probabilidad de rechazar un lote bueno (con porcentaje de defectuosas igual al $p_A$ *(AQL)*)

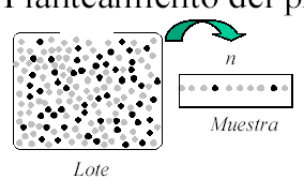
$$\alpha = P(X > c \mid p = p_A).$$

- **Riesgo del comprador**: Probabilidad de aceptar un lote malo (con un porcentaje de defectuosas $p_R >> p_A$)

$$\beta = P(X \le c \mid p = p_R).$$



# Planteamiento del problema




*DATOS:*

$p_A = AQL$   $\alpha$: *Riesgo vendedor*
$p_R = RQL$   $\beta$: *Riesgo comprador*

*OBJETIVO:*

*n: tamaño muestral*
*c: máximo defectuosas*

## Ecuación del vendedor

$p \equiv$ Proporción de piezas defectuosas en el lote

$X \equiv$ Número de piezas defectuosas en una muestra de $n$

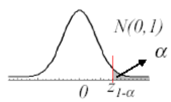
$X \rightarrow$ Binomial $(n, p) \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$

Si $p = p_A$

á $= P(X > c | p = p_A) = P(\frac{X - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}} > \frac{c - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}})$

$= P(Z \geq z_{1-\alpha})$

Conocido $\alpha \Rightarrow \boxed{z_{1-\alpha} = \frac{c - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}}}$





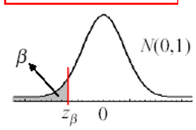

## Ecuación del comprador

Si $p = p_R$ :

$\beta = P(X \leq c | p = p_R) = P(\frac{X - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}} \leq \frac{c - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}})$

$= P(Z \leq z_\beta)$

Conocido $\beta \Rightarrow \boxed{z_\beta = \frac{c - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}}}$





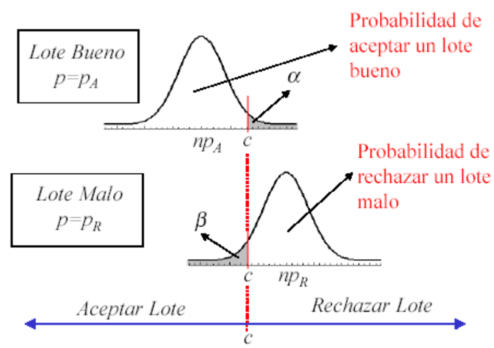

## Valores de $n$ y $c$

$$z_{1-\alpha} = \frac{c - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}} \qquad z_\beta = \frac{c - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}}$$

$$n = \left( \frac{z_{1-\alpha}\sqrt{p_A(1-p_A)} - z_\beta\sqrt{p_R(1-p_R)}}{p_R - p_A} \right)^2$$

$$c = np_A + z_{1-\alpha}\sqrt{np_A(1-p_A)}$$








## Ejemplo: plan de muestreo

Diseñar un plan de muestreo para lotes de 10000 unidades con un AQL igual al 0.02, RQL igual a 0.08, riesgo de comprador de 0.10 y del vendedor igual al 0.05.

Para $\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{1-\alpha} = 1.64$ y $\beta = 0.10 \Rightarrow z_\beta = -1.28$

$$n = \left( \frac{1.65\sqrt{0.02 \times 0.98} + 1.28\sqrt{0.08 \times 0.92}}{0.08 - 0.02} \right)^2 \approx 93$$

$$c = 93 \times 0.02 + 1.65\sqrt{93 \times 0.02 \times 0.98} \approx 4$$



## Ejemplo: plan de muestreo

Diseñar un plan de muestreo para lotes de 10000 unidades con un AQL igual al 0.02, RQL igual a 0.08, riesgo de comprador de 0.10 y del vendedor igual al 0.05.

Para $\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{1-\alpha} = 1.64$ y $\beta = 0.10 \Rightarrow z_\beta = -1.28$

$$n = \left( \frac{1.65\sqrt{0.02 \times 0.98} + 1.28\sqrt{0.08 \times 0.92}}{0.08 - 0.02} \right)^2 \approx 93$$

$$c = 93 \times 0.02 + 1.65\sqrt{93 \times 0.02 \times 0.98} \approx 4$$

Ej. En un pequeño colegio particular la tasa de aprobación es 72% en Algebra. Si 500 estudiantes se matriculan en un semestre determinado en el curso, determine la probabilidad de que al menos 375 de los estudiantes pasen.

$$\mu = np = 500(.72) = 360$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500(.72)(.28)} \approx 10$$

$$P(X \leq 375) \approx \Phi\left(\frac{375.5 - 360}{10}\right) = \Phi(1.55) = 0.9394$$



## "Regla del 68-95-99.7"

*Cualquier v.a. normal* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Z \sim N(0, 1)$

$$P(\mu - 1\times\sigma < X < \mu + 1\times\sigma) = P(-1 < Z < 1) = 68\%$$

$$P(\mu - 2\times\sigma < X < \mu + 2\times\sigma) = P(-2 < Z < 2) = 95\%$$

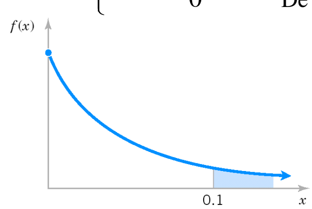
$$P(\mu - 3\times\sigma < X < \mu + 3\times\sigma) = P(-3 < Z < 3) = 99.7\%$$



## *Distribución Exponencial*

Una v.a.c. $X$ tiene una *distribución exponencial* con parámetros $\lambda$ si su densidad es

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{De otro modo} \end{cases}$$






## *4.4. La Distribución Gamma y sus Relacionadas*

### La función Gamma

La *función gamma* $\Gamma(\alpha)$ se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad Para \quad \alpha > 0$$

*Note que;*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = -\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, de^{-x} = -\{[x^{\alpha-1} e^{-x}]_0^\infty - (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x}\, dx\}$$

$$= (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x}\, dx = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1).$$

*Si* $\alpha \equiv n$ *(un entero positivo), entonces* $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$



## *Distribución Gamma*

Una v.a.c $X$ tiene *distribución gamma* si su densidad es

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & \text{Tov} \end{cases}$$

Donde los parámetros satisfacen $\alpha > 0, \beta > 0$.

La distribución gamma estándar tiene $\beta = 1$.

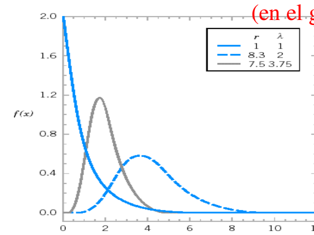


## *Media y Varianza*

La media y la varianza de una v.a.c. $X$ que tiene distribución Gamma son

$$E(X) = \mu = \alpha\beta \quad V(X) = \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

(en el gráfico, r≡α, λ≡1/β)



## Probabilidades de la distribución Gamma

Sea $X$ con distribución gamma de parámetros $\alpha$ y $\beta$.

Entonces para $x > 0$, la densidad de $X$ está dada por

$$P(X \leq x) = F(x;\alpha,\beta) = F\left(\frac{x}{\beta};\alpha\right)$$

donde

$$F(x;\alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}dy$$



## Media y Varianza

La media y varianza de una variable aleatoria $X$ que tiene distribución exponencial

$$\mu = \alpha\beta = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



## Distribuciones Gamma y Exponencial

Sea $X$ con distribución gamma con $\alpha$=1 y $\beta$ = 1/$\lambda$, entonces X tiene distribución exponencial,

Con densidad dada por

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Note que $S(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$, se llama la función (⇒ Análisis de sobrevivencia y Teoria de renovación)



## Aplicaciones de la Distribución Exponencial

Suponga que el número de sucesos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo de longitud $t$ tiene distribución Poisson de parámetro $\alpha t$ y que el número de ocurrencias en intervalos no traslapantes independientes entre sí. Entonces la distribución de los tiempos transcurridos entre las ocurrencias de dos sucesos sucesivos es exponencial de parámetro $\lambda = \alpha$.



## Distribución Ji.Cuadrado

Sea $v$ entero positivo. Una variable aleatoria $X$ se dice que tiene una *distribución Ji-cuadrado* con parámetro $v$ si la densidad de $X$ es la gamma con densidad de parámetros $\alpha = v/2$ y $\beta = 2$.

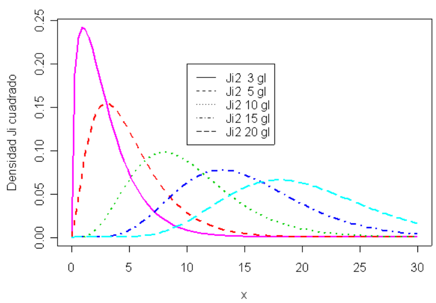
$$f(x;v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{(v/2)-1}e^{-x/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



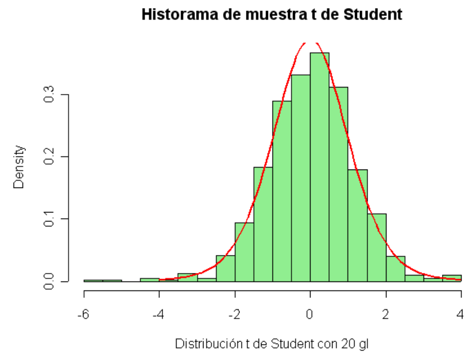
## Distribución Ji-cuadrado

El parámetro $v$ se llama *número de grados de libertad* (gl) de $X$. El símbolo $\chi^2$ se usa a menudo en lugar de "Ji-cuadrado"

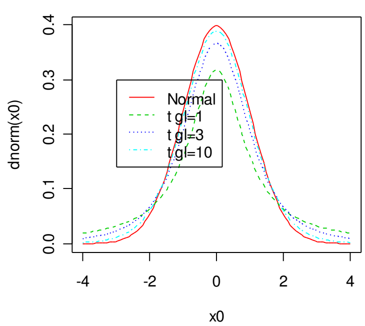
## Ji-cuadrado










## 4.5. Otras Distribuciones Continuas

### Distribución Weibull

*Una v.a.c X* tiene **distribución Weibull** si la densidad es

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Donde los parámetros satisfacen $\alpha>0,\beta>0$.



## Media y Varianza

La media y varianza de una variable $X$ que tiene distribución Weibull son, respectivamente:

$$\mu=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \quad \sigma^2=\beta^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}$$

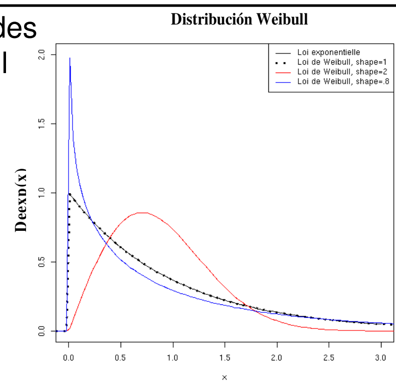


## Distribución Weibull

La función de distribución (acumulativa) de una v.a.c. Weibull con parámetros $\alpha$ *y* $\beta$, *es*

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Densidades Weibull






## Distribución Lognormal

*Una v.a.c no negativa* $X$ tiene *distribución lognormal* si la v.a.c $Y = \ln(X)$ tiene una distribución normal resultante con parámetros $\mu$ y $\sigma$:

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha x} e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



## Media y Varianza

*La media y la varianza de una variable X* con distribución lognormal son

$$E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2} \qquad V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$



## Distribución Lognormal

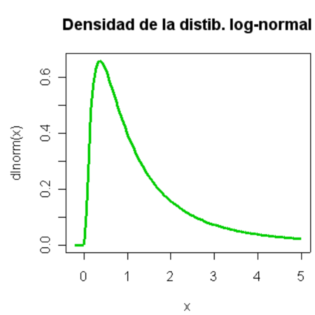
La distribución (acumulativa) de una v.a. X lognormal es

$$F(x;\mu,\alpha) = P(X \le x) = P[\ln(X) \le \ln(x)]$$

$$= P\left(Z \le \frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$



## Grafico de distribución lognormal






## Distribución Beta

*Una v.a.c. X se dice que tiene una* *distribución beta* con parámetros *A, B,* $\alpha$ y $\beta$. *Si la densidad de X* es

$$f(x;\alpha,\beta,A,B) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{B-A}\cdot\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\left(\dfrac{x-A}{B-A}\right)^{\alpha-1}\left(\dfrac{B-x}{B-A}\right)^{\beta-1} & x \ge 0 \\ 0 & \text{De otro modo} \end{cases}$$

## Media y Varianza

La media y varianza de una variable $X$ con distribución beta son

$$\mu = A + (B - A) \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{(B - A)^2 \alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$



## 4.6. Gráficos de Probabilidad

### Percentil muestral

En una muestra de tamaño $n$ con las observaciones ordenadas de menor a mayor. La observación $i^{ésima}$ menor en la lista se toma como el $[100(i - 0.5)/n]$ **percentil muestral.**



## Gráfico de Probabilidad Normal

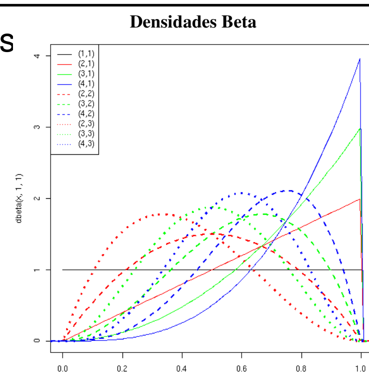
Un gráfico de los pares

$$\left( [100(i - .5)/n]^{mo} \text{z-percentil}, \ i\text{-ésima observación menor} \right)$$

En un sistema de coordenadas bidimensional se llama gráfico de probabilidad normal. Si la muestra proviene de una distribución normal los puntos se ubicarán muy cercanos a la recta con pendiente $\sigma$ e intercepto $\mu$.



## Densidades Beta






## Mas allá de la normalidad

Consideremos una familia de distribuciones de probabilidad que involucren dos parámetros $\theta_1$ y $\theta_2$. Sea $F(x;\theta_1,\theta_2)$ la correspondiente distribucion acumulada. Los parámetros $\theta_1$ y $\theta_2$ se dicen parámetros de *localización* y *escala*

$$F(x;\theta_1,\theta_2) \text{ es función de } \frac{x-\theta_1}{\theta_2}.$$